

Formelsammlung - Physik

Mario Konrad
Mario.Konrad@gmx.net

26. Oktober 2003

Inhaltsverzeichnis

I	Mechanik	2
1	Kinematik	3
1.1	Geschwindigkeit v	3
1.2	Beschleunigung a	3
1.3	Freier Fall	3
1.4	Schiefer Wurf (ohne Reibung)	4
1.5	Kreisbewegung $\phi(t)$	4
1.6	Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$	4
1.7	Winkelbeschleunigung $\alpha(t)$	5
1.8	Kreisförmige Bewegung (Gleichförmig)	5
1.9	Horizontaler Wasserstrahl	5
2	Dynamik	6
2.1	Kraft	6
2.2	Gravitation	6
2.3	Federkraft	6
2.4	Newton	6
2.5	Aktion / Reaktion	6
2.6	D'Alembert'sches Gesetz	6
2.7	"Freier Fall" mit Hemmung	7
2.8	Flaschenzug	7
2.9	Looping	7
2.10	Zentrifugalkraft	8
2.11	Reibungskoeffizient μ	8
2.12	Kugel in Mulde	8
2.13	Gravitation	8
2.14	Anziehung von Punktmassen	9
2.15	Zusammenhang zwischen g und G	9
2.16	Arbeit W	11
2.17	Leistung P	11
2.18	Energie E	12
2.19	Mathematisches Pendel	12
2.20	System von Massepunkten	13
2.21	Impuls	14
2.22	Impulserhaltung	14
2.23	Ballistisches Pendel	15
2.24	Physikalisches Pendel	15
2.25	Drehimpuls / Drall	16
II	Hydromechanik	17

3	Definitionen	18
3.1	Hydrostatik	18
3.2	Hydrodynamik	18
3.3	Dichte ρ	18
3.4	Spezifisches Gewicht γ	18
3.5	Druck p	18
4	Druck	18
4.1	Schweredruck	18
4.2	Hydrostatische Übersetzung	19
4.3	Auftrieb F_A (Archimedes)	19
4.4	Bernoulli	19
4.5	Ausflussgeschwindigkeit	19
4.6	Pitot-Rohr	20
5	Widerstand	20
5.1	Reibungswiderstand	20
5.2	Druckwiderstand	20
5.3	Gesamtwiderstand	20
5.4	Reynold'sche Zahl	21
III	Wärmelehre	22
6	Definitionen	23
6.1	Wärmemenge Q	23
6.2	Trippelpunkt	23
6.3	Spezifische Wärme	23
6.4	Kalorie	23
6.5	Mischen	23
6.6	Spezifische Wärme für Gase	24
6.7	Längenausdehnung	24
6.8	Volumenausdehnung	24
6.9	Ideales Gas	24
6.10	Stoffmenge in $kmol$	24
6.11	Zustandsgleichung	25
6.12	Luftdruckabnahme in Atmosphäre	25
7	Kinetische Gastheorie	25
7.1	Gas aus n Molekülen (Punktmassen)	25
7.2	Mehratomige Moleküle	26
7.3	Innere Energie U eines Gases	26
7.4	Gasgemische	26
7.5	Gesetz von Dalton	26
7.6	Relative Feuchtigkeit ϕ	26
8	Thermodynamik	27
8.1	1. Hauptsatz	27
8.2	Adiabatische (isentrop) Prozesse	27
8.3	Kreisprozesse	28
8.4	2. Hauptsatz	28
8.5	Carnot-Zyklus	28
8.6	Wärme-Kraft-Maschine	28
8.7	Thermodynamischer Wirkungsgrad	28
8.8	Arbeitsmaschine, Wärmepumpe	28
8.9	Leistungszahl COP	28
9	Wärmeleitung	29
9.1	Wärmestromdichte	29
9.2	Wärmeübergang	29

IV Wellenlehre	30
10 Schwingung	31
10.1 Erzwungene und gedämpfte Schwingung	31
11 Wellen	32
11.1 Harmonische Welle	32
11.2 Ausbreitungsgeschwindigkeit	32
11.3 Dopplereffekt	33
11.4 Stehende Wellen	33
11.5 Stehende Welle auf Saite	34
11.6 Anregfrequenzen für Eigenschwingungen	34
11.7 Stehende Welle in Luftsäule	34
12 Reflexion und Brechungsgesetz	34
12.1 Allgemein	34
12.2 Prinzip von Fernet	35
13 Interferenz	35
13.1 Kohärenz	35
13.2 Beugung am Spalt	35
13.3 Beugung am Gitter	36
14 Ergänzungen	36
14.1 Koinzidenz	36
14.2 Addition	36
V Elektro	37
15 Felder	38
15.1 Gravitationsfeld	38
15.2 Feldfluss	38
15.3 Definitionen	38
15.4 Satz von Gauss	39
15.5 Elektrische Ladung: Beispiele	39
16 Elektrische Spannung	40
17 Elektrostatik	40
17.1 Berechnung E aus U	40
17.2 Dielektrika	40
17.3 Bewegung von Ladung im E -Feld	41
17.4 Mobilität	41
17.5 Energieim Kondensator	41
17.6 Energiedichte v	41
17.7 Anziehung zweier Platten	41
18 Stromstärke	42
19 Ohm'sches Gesetz	42
20 Zeitkonstante τ	42
20.1 Laden und Entladen eines Kondensators	42
21 Kirchhoff	42
21.1 Knotenpunktsatz	42
21.2 Maschenpotentialsatz	42
VI Magnetismus	43

22	Ausdrücke	44
23	Lorentzkraft	44
24	Gesetz von Biot-Savart	44
25	Gesetz von Ampère	44
25.1	Beispiel: Spule	44
26	Bahnkurve eines geladenen Teilchens	45
27	Spezifische Ladung $\frac{e}{m}$ des Elektrons	45
28	Kraft im hom. Magnetfeld	45
28.1	Auf Leiter	45
28.2	Zwischen zwei geraden, parallelen Strömen	46
28.3	Gleichstrommotor	46
28.4	Galvanometer	46
28.5	Drehmoment auf ebene Leiterschleife	46
29	Induktivität	47
29.1	Induktionsgesetz von Faraday	47
29.2	Selbstinduktion	47
29.3	Schalten eines Stromes in einer Spule	47
29.4	Transformator	48
29.5	Energie des magnetischen Feldes	48
30	RCL-Kreis	49
VII Relativitätstheorie		50
31	Lichtgeschwindigkeit c	51
32	Galilei-Transformation (GT)	51
33	Lorentz-Transformation	51
33.1	Hintransformation	51
33.2	Rücktransformation	51
33.3	Notation	51
33.4	Transformationen, die 2.	51
34	Geschwindigkeitsaddition	52
34.1	Longitudinal	52
34.2	Allgemein	52
35	Dopplereffekt	52
35.1	Longitudinal	52
35.2	Transversal	52
36	Längenkontraktion	52
37	Zeitdilatation	52
38	μ-Meson	53

Teil I
Mechanik

1 Kinematik

1.1 Geschwindigkeit v

$$v = \frac{s}{t} \quad \left[\frac{m}{s} \right] \quad (1)$$

$$v_{(t)} = \frac{\delta s}{\delta t} \quad \left[\frac{m}{s} \right] \quad (2)$$

1.2 Beschleunigung a

Negative Beschleunigungen nennt man auch: **Verzögerung**.

$$a = \frac{v}{t} \quad \left[\frac{m}{s^2} \right] \quad (3)$$

$$a_{(t)} = \frac{\delta v}{\delta t} \quad \left[\frac{m}{s^2} \right] \quad (4)$$

Für $a = \text{const}$ gilt:

$$s_{(t)} = \frac{a}{2}(t - t_1)^2 + v_1(t - t_1) + s_1 \quad [m] \quad (5)$$

$$v_{(t)} = a(t - t_1) + v_1 \quad \left[\frac{m}{s} \right] \quad (6)$$

Für $a_{(t)} = pt + q$ gilt:

$$v_{(t)} = \frac{p}{2}t^2 + q \cdot t + v_0 \quad \left[\frac{m}{s} \right] \quad (7)$$

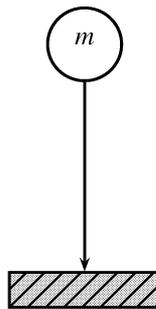
$$s_{(t)} = \frac{p}{6}t^3 + \frac{q}{2}t^2 + t \cdot v_0 + s_0 \quad [m] \quad (8)$$

Für $a_{(t)} = kt^n$ gilt:

$$v_{(t)} = \frac{k}{n+1}t^{n+1} + v_0 \quad \left[\frac{m}{s} \right] \quad (9)$$

$$s_{(t)} = \frac{k}{(n+1)(n+2)}t^{n+2} + t \cdot v_0 + s_0 \quad [m] \quad (10)$$

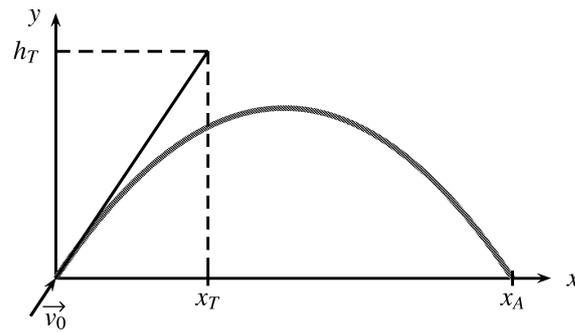
1.3 Freier Fall



$$t_{\text{end}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad [s] \quad (11)$$

$$v_{(t)} = g \cdot t \quad \left[\frac{m}{s} \right] \quad (12)$$

1.4 Schiefer Wurf (ohne Reibung)



$$v_{x0} = \|\vec{v}_0\| \cdot \cos \alpha \quad \left[\frac{m}{s} \right] \quad (13)$$

$$v_{y0} = \|\vec{v}_0\| \cdot \sin \alpha \quad \left[\frac{m}{s} \right] \quad (14)$$

$$t_A = \frac{2 \cdot v_{y0}}{g} = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin \alpha}{g} \quad [s] \quad (15)$$

$$x_A = \frac{2}{g} \cdot v_0^2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha = v_0^2 \frac{\sin 2\alpha}{g} \quad [m] \quad (16)$$

$$t_T = \frac{x_T}{v_{x0}} = \frac{x_T}{v_0 \cdot \cos \alpha} \quad [s] \quad (17)$$

$$y_{T(x_T)} = -\frac{g}{2} \cdot \frac{x_T^2}{v_{x0}^2} + h_T \quad [m] \quad (18)$$

Bahnkurve:

$$y(x) = -\frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_{x0}^2} + x \cdot \frac{v_{y0}}{v_{x0}} \quad [m] \quad (19)$$

Für horizontalen Abschluss:

$$y(x) = -\frac{g}{2 \cdot v_{x0}^2} \cdot x^2 \quad [m] \quad (20)$$

1.5 Kreisbewegung $\phi(t)$

Skalar:

$$\phi(t) = \frac{b}{r} \quad [rad] \quad (21)$$

Vektor:

$$\vec{\phi}(t) = \frac{b}{r} \cdot \frac{\vec{e}}{\|\vec{e}\|} \quad [rad] \quad (22)$$

1.6 Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$

Skalar:

$$\omega(t) = \frac{\phi_2 - \phi_1}{t_2 - t_1} \quad \left[\frac{rad}{s} \right] \quad (23)$$

Vektor:

$$\vec{\omega}(t) = \omega(t) \cdot \hat{e} = \omega(t) \cdot \frac{\vec{e}}{\|\vec{e}\|} \quad \left[\frac{rad}{s} \right] \quad (24)$$

1.7 Winkelbeschleunigung $\alpha_{(t)}$

$$\alpha_{(t)} = \frac{\delta\omega}{\delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} \quad \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right] \quad (25)$$

$$\vec{\alpha}_{(t)} = \alpha_{(t)} \cdot \hat{e} \quad (26)$$

$$s = r \cdot \phi \quad [\text{m}] \quad (27)$$

$$v_{\text{tangential}} = r \cdot \omega \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \quad (28)$$

$$a_{\text{tangential}} = r \cdot \alpha \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \quad (29)$$

1.8 Kreisförmige Bewegung (Gleichförmig)

Zentripetalbeschleunigung a_p zeit in Richtung Kreismittelpunkt:

$$\|\vec{a}_p\| = \omega^2 r \quad (30)$$

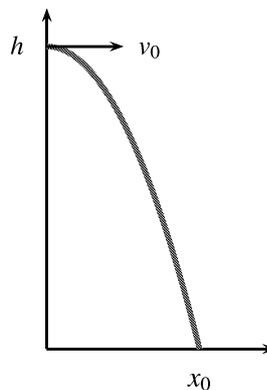
$$\vec{a}_p = -\omega^2 \vec{r} = -\frac{v^2}{r^2} \cdot \vec{r} \quad (31)$$

mit

$$\begin{aligned} \omega & : \text{Kreisfrequenz} \\ v & = \frac{\omega}{2\pi} \quad : \text{lineare Frequenz} \\ T & = \frac{1}{v} \quad : \text{Periode} \end{aligned}$$

$$a_p = \omega^2 r = \frac{v_{\text{tan}}^2}{r} \quad \implies \quad \omega = \frac{v_{\text{tan}}}{r}$$

1.9 Horizontaler Wasserstrahl



$$x_0 = \sqrt{\frac{2hv_0^2}{g}} \quad (32)$$

$$y = \frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2 \quad (33)$$

1.9.1 Krümmungsradius der Parabel in O

$$r = \frac{v_0^2}{g} \quad (34)$$

allgemein:

$$r = \frac{1}{2A} \quad \text{Scheitelkrümmungsradius der Parabel} \quad (35)$$

2 Dynamik

2.1 Kraft

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad [N] \quad (36)$$

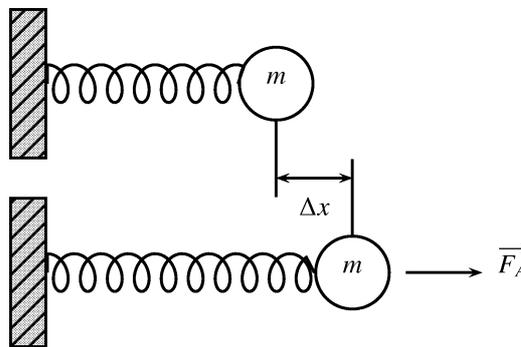
in der relativistischen Physik (wurde so von Newton formuliert):

$$\vec{F} = \frac{\Delta(m \cdot \vec{v})}{\Delta t} \quad (37)$$

2.2 Gravitation

$$F_s = m \cdot g \quad [N] \quad \text{mit } g = 9.81 \quad (38)$$

2.3 Federkraft



$$k \cdot \Delta x = F_A = -F_F \quad (39)$$

mit

- k : Federkonstante
- F_A : äussere Kraft
- F_F : Federkraft

2.4 Newton

2.4.1 Trägheitsgesetz

Massepunkt, auf den keine Kräfte wirken ist in Ruhe oder auf gleichförmiger, geradliniger Bewegung.

2.4.2 Definition der Kraft

$$\vec{F} = \frac{\Delta(m \cdot \vec{v})}{\Delta t} \quad \text{mit } m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (40)$$

2.5 Aktion / Reaktion

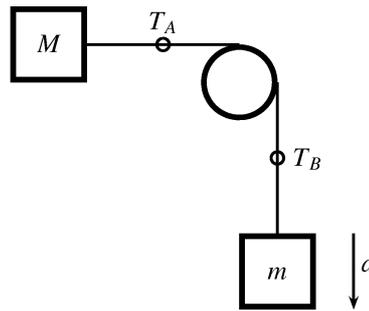
Kräfte, die zwei Körper aufeinander ausüben sind gleich:

$$F_{ij} = -F_{ji} \quad i \text{ übt Kraft auf } j \text{ aus} \quad (41)$$

2.6 D'Alembert'sches Gesetz

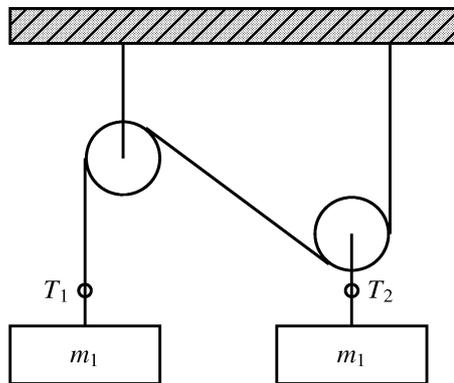
$$\sum F = 0 \quad (42)$$

2.7 "Freier Fall" mit Hemmung



$$a = \frac{m}{m+M} \cdot g \quad T_B = m(g-a) \quad T_A = \frac{mM}{m+M} \cdot g \quad (43)$$

2.8 Flaschenzug

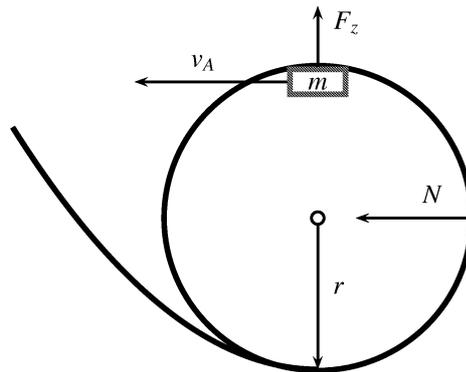


$$T_1 = m_1(g-a) \quad \text{und} \quad T_2 = m_2\left(g + \frac{a}{2}\right) \quad (44)$$

$$2T_1 = T_2 \quad (45)$$

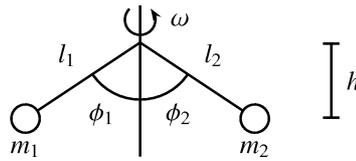
$$a = g \cdot \frac{m_1 - \frac{m_2}{2}}{m_1 + \frac{m_2}{4}} \quad (46)$$

2.9 Looping

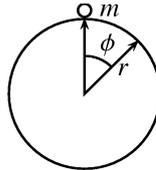


$$F_z = \frac{m \cdot v_A^2}{r} = m \cdot g + N \quad \text{und} \quad v_A \text{ kritisch } (N = 0) : v_A = \sqrt{gr} \quad (47)$$

2.10 Zentrifugalkraft



$$h = \frac{g}{\omega^2} \quad 1 \geq \cos(\phi_2) = \frac{g}{\omega^2 \cdot l_2} \quad \rightarrow \quad \omega_i \geq \sqrt{\frac{g}{l_i}} \quad (48)$$



$$F_p = m \cdot a_p \quad \text{mit} \quad a_p = \omega^2 \cdot r \quad \text{und} \quad \omega = \frac{\phi}{t} \quad (49)$$

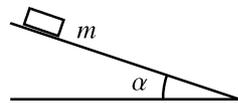
Es gilt auch: $\vec{F}_{\text{zentrifugal}} = -\vec{F}_{\text{zentrifugal}}$

2.11 Reibungskoeffizient μ

2.11.1 Haftreibungskoeffizient μ_H

$$\|\vec{N}\| \cdot \mu_H = \|\vec{R}_{\text{max}}\| \quad \text{mit} \quad \vec{N} : \text{Normalkraft} \quad \vec{R} : \text{Reibungskraft} \quad (50)$$

$$\mu_H = \frac{\|\vec{R}_{\text{max}}\|}{\|\vec{N}\|} = \tan(\alpha_{\text{kritisch}})$$

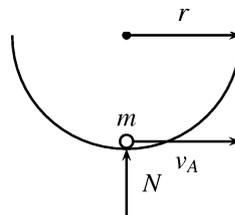


2.11.2 Gleitreibungskoeffizient μ_G

$\mu_G < \mu_H$ nicht Geschwindigkeitsabhängig!

Stahl-Stahl: $\mu_H = 0.15$ $\mu_G = 0.12$

2.12 Kugel in Mulde



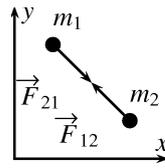
$$N = m \left(g + \frac{v_A^2}{r} \right) \quad (51)$$

2.13 Gravitation

2.13.1 Universelle Gravitationskonstante G

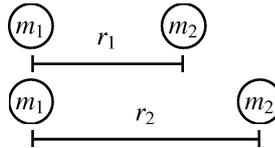
$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \quad \left[\frac{N \cdot m}{kg^2} \right] \quad (52)$$

2.14 Anziehung von Punktmassen



(F_{ij} : i übt auf j Kraft F aus)

$$F = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad \text{mit } r : \text{Abstand der Punkte} \quad (53)$$



$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

2.14.1 Punktmasse ausserhalb Kugelmasse

Zentralsymmetrische Kugelmassenverteilung $\rho = m \cdot V^{-1}$. Masse kann als Punkt im Zentrum angenommen werden.

2.15 Zusammenhang zwischen g und G

$$\rho_{\text{Erde}} = \frac{3 \cdot g}{G \cdot 4 \cdot \pi \cdot r} \quad g = \frac{M \cdot G}{r^2} \quad (54)$$

2.15.1 Umlaufzeit

$$M_{\text{Sonne}} \gg m_{\text{planet}} \quad \frac{G \cdot M_{\text{Sonne}}}{4 \cdot \pi^2} = \frac{r^3}{T^2} \quad (55)$$

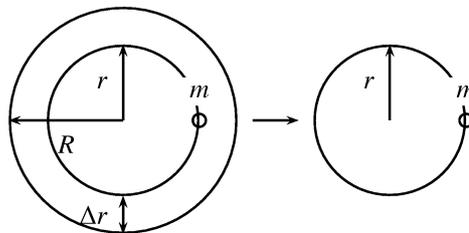
2.15.2 3. Kepler'sches Gesetz

$$\frac{T^2}{r^3} \text{ ist konstant} \quad \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} \quad (56)$$

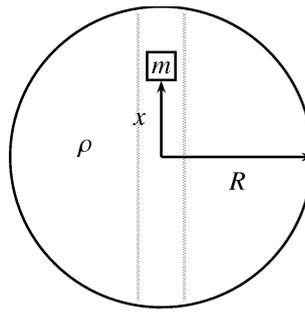
2.15.3 Punktmasse innerhalb Kugelmasse

(Zentralsymmetrische Dichteverteilung)

Eine Kugelschale mit konstanter Dichte ρ übt auf eine Masse m , die sich innerhalb dieser Kugelschale befindet *keine* Gravitationskraft aus.

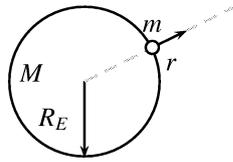


2.15.4 Erde mit Kanal



$$a(t) = -\frac{4}{3}\pi \cdot G \cdot \rho \cdot x(t) \tag{57}$$

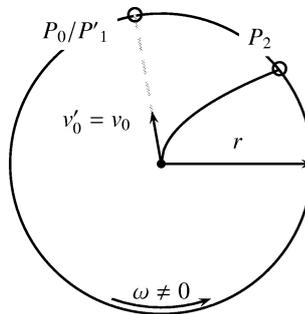
2.15.5 Flucht von der Erde



$$a(r) = -g \cdot \frac{R_E^2}{r^2} \quad \text{mit} \quad g = \frac{G \cdot M}{R_E^2} \tag{58}$$

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot R_E} \tag{59}$$

2.15.6 Coriolis-Kraft



$$b_c = 2 \cdot v'_0 \cdot \omega$$

$$F_c = m \cdot b_c$$

mit

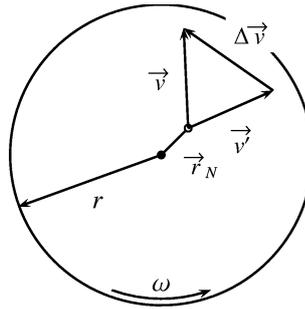
b_c : Coriolis-Beschleunigung

F_c : Coriolis-Kraft

$$\vec{F}_c = m \cdot \vec{b}_c = 2 \cdot m \cdot (\vec{v}' \times \vec{\omega})$$

$$\vec{b}_c = 2 \cdot \vec{v}' \times \vec{\omega}$$

2.15.7 Geschwindigkeit im rot. System



$$\Delta \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}_N \quad (60)$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}_N \quad (61)$$

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{r}_N \quad (62)$$

2.15.8 Beschleunigungen im rot. System

$$\vec{b}' = \vec{b} + 2\vec{v}' \times \vec{\omega} + \omega^2 \cdot \vec{r}_N \quad (63)$$

Alle "Strich"-Größen sind die des Plattenbewohners.

2.16 Arbeit W

$$W \left[J = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} = \text{Nm} = \text{Ws} \right] \quad (64)$$

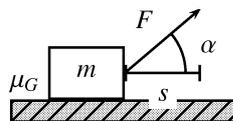
$$\Delta W = \Delta \vec{s} \circ \Delta \vec{F}_{(s)} = \|\Delta \vec{F}_{(s)}\| \cdot \|\Delta \vec{s}\| \cdot \cos(\alpha)$$

$$W = m \cdot v^2 \cdot \frac{1}{2}$$

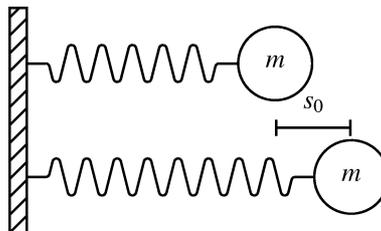
2.16.1 Ziehen eines Schlittens

$$W = s \cdot \mu_G (m \cdot g - F \cdot \sin(\alpha))$$

$$F \cdot \cos(\alpha) = \mu_G (m \cdot g - F \cdot \sin(\alpha))$$



2.16.2 Feder mit Federkonstante k



$$W = k \cdot \frac{s_0^2}{2} \quad (65)$$

2.17 Leistung P

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad [\text{W}] \quad 1 \text{ PS} = 746 \text{ W} \quad (66)$$

2.18 Energie E

Energie ist das Vermögen Arbeit zu leisten: E [J]

2.18.1 Energieerhaltungssatz

$$E_{\text{vorher}} = E_{\text{nachher}} \quad (67)$$

2.18.2 Potentielle Energie

$$E_L = E_{\text{Pot}} = m \cdot g \cdot h \quad (68)$$

2.18.3 Reversible Deformationsenergie

$$E_D = \frac{1}{2} \cdot k \cdot s_0^2 \quad (69)$$

(potentielle Energie)

2.18.4 Kinetische Energie

$$E_K = E_{\text{Kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad (70)$$

2.18.5 Wärme-Energie

$$E_{\text{reib}} = \mu_G \cdot N \cdot s \quad (71)$$

(kann weder direkt noch vollständig zurückgewonnen werden)

2.18.6 Energie der Masse (Einstein)

$$E = m \cdot c^2 \quad \text{mit } c = 3 \cdot 10^8 \left[\frac{m}{s} \right] \quad (72)$$

$$m_{(v)} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{mit } m_0 : \text{ Ruhemasse} \quad (73)$$

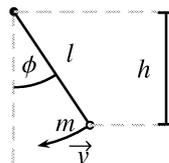
2.18.7 Rotationsenergie

$$E_{K,R} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \quad (74)$$

$$I = \sum r_{N_i}^2 \cdot \Delta m_i \quad r_{N_i} \text{ ist normal zu ausgezeichneten Achse} \quad (75)$$

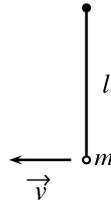
I	
Kugel	$\frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2$
Stab (Drehachse in der Mitte der Längsachse)	$\frac{1}{12} \cdot m \cdot l^2$
Stab (Drehachse an einem Ende)	$\frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2$
Vollzylinder (Drehachse in Längsachse)	$\frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2$
Hohlzylinder (Drehachse in Längsachse)	$m \cdot R^2$

2.19 Mathematisches Pendel



Annahme: $\phi \ll \frac{\pi}{2}$ so dass $\sin(\phi) \approx \phi \implies \alpha = -\frac{g}{l} \cdot \phi$ (harmonischer Oszillator)

$$\omega^2 + \frac{g}{l} \cdot \phi^2 = \frac{2 \cdot E}{l^2 \cdot m} \quad \text{mit } \phi \ll \frac{\pi}{2} \quad (76)$$



$$\begin{aligned} \phi(t) &= \phi_{max} \cdot \sin(\Omega t) \\ \omega(t) &= \Omega \cdot \phi_{max} \cdot \cos(\Omega t) \end{aligned}$$

mit

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Bemerkung

$$\ddot{y} = -\lambda \cdot y \quad \text{z.B. Feder: } \lambda = \frac{k}{m} \tag{77}$$

2.19.1 Pendeluhr



$$T^{-1} = \nu = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{g}{l}}}{2\pi} \tag{78}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \tag{79}$$

Lösung der Bewegungsgleichung mit Anfangsbedingung:

$$\phi(0) = \phi_{max} \quad \omega(0) = 0$$

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \phi_{max} \cdot \cos(\Omega t) \\ \omega(t) &= -\Omega \cdot \phi_{max} \cdot \sin(\Omega t) \end{aligned}$$

$$\alpha(t) = -\Omega^2 \cdot \phi_{max} \cdot \cos(\Omega t) \quad \text{wobei } \Omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

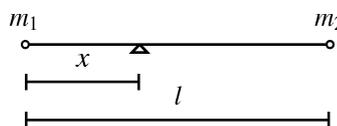
2.20 System von Massepunkten

2.20.1 Gleichgewicht

$$\sum \vec{F}_{\text{äussere}} = 0 \tag{80}$$

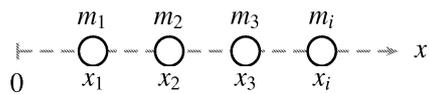
2.20.2 Drehmoment

$$\begin{aligned} \vec{T} &= \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{Drehmoment bezüglich eines bel. Punktes} & (81) \\ \sum \vec{T}_i &= \sum (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = 0 \quad \text{2. Bedingung für Gleichgewicht} & (82) \end{aligned}$$



$$x = \frac{l \cdot m_2}{m_1 + m_2} \quad \Rightarrow \quad \text{System im Gleichgewicht}$$

2.20.3 Schwerpunkt



$$M \cdot x_s = \sum_{i=1}^N m_i \cdot x_i \quad M = \sum_{i=1}^N m_i \quad (83)$$

2.20.4 Satz von Steiner



I_s : Trägheitsmoment bezüglich \vec{s}

I_d : Trägheitsmoment bezüglich \vec{d}

$$I_d = I_s + M \cdot a^2 \quad (84)$$

2.20.5 Schwerpunktsatz

Der Schwerpunkt in einem System von Massepunkten bewegt sich als ob in ihm die ganz Massenkonzentration wäre, und sämtliche äusseren Kräfte an ihm angreifen würden.

2.21 Impuls

2.21.1 Definition

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \quad \left[\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \right] \quad (85)$$

2.21.2 Zusammenhang mit E_{Kin}

$$E_{Kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \vec{v} = \frac{p^2}{2 \cdot m} \quad (86)$$

2.21.3 Zusammenhang mit 2. Newton'schen Gesetz

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \vec{F} \quad (87)$$

2.22 Impulserhaltung

2.22.1 Für 2 Massepunkte

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konstant} \quad (88)$$

$$\vec{p}_{total} = \sum \vec{p}_i \quad (89)$$

2.22.2 Für n Massepunkte

$$\frac{\partial \vec{p}_{total}}{\partial t} = \vec{F}_{total} \quad (90)$$

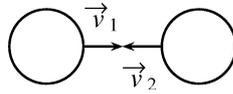
$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_i \vec{p}_i = \sum_j \vec{F}_j \quad (91)$$

\vec{F}_{total} und \vec{F}_j als äussere Kräfte.

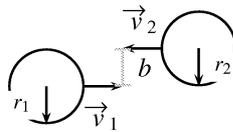
2.22.3 Arten von Impulserhaltung

1. *Unelastisch*: Körper sind zusammen
2. *Inelastisch*: Körper sind deformiert, Oszillation
3. *Elastisch*: Kein Energieverlust, **existiert nicht!**

2.22.4 Stossparameter b



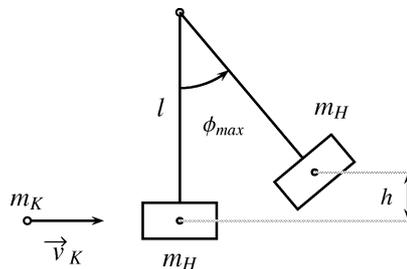
gerader zentraler Stoss $b = 0$



gerader nicht zentraler Stoss $b > 0$

- $r_1 + r_2 < b \rightarrow$ kein Stoss
- $r_1 + r_2 \geq b \rightarrow$ Stoss der Art 1...3

2.23 Ballistisches Pendel

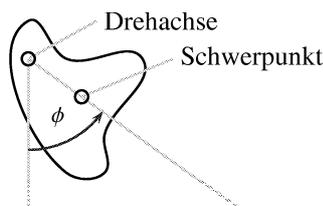


Impulserhaltung: $m_K \cdot v_K = v_H(m_K + m_H)$

Energieerhaltung: $\frac{1}{2}(m_K + m_H) \cdot v_H^2 = g \cdot h \cdot (m_K + m_H)$

$$\Rightarrow v_K = \frac{m_K + m_H}{m_K} \cdot \sqrt{2 \cdot l \cdot g \cdot (1 - \cos(\phi_{max}))} \tag{92}$$

2.24 Physikalisches Pendel



$$I_{K,D} = I_{K,S} + l^2 \cdot m$$

$$-l \cdot m \cdot g \cdot \sin(\phi) = I_{K,D} \cdot \phi \tag{93}$$

Für kleine Ausschläge: $\sin(\phi) = \phi$

$$\Rightarrow f = -\frac{l \cdot m \cdot g}{I_{K,S} + m \cdot l^2} \cdot \phi$$

$$\phi(t) = \phi_0 \cdot \cos(\omega t) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{l \cdot m \cdot g}{I_{K,S} + m \cdot l^2}}$$

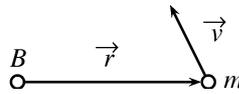
$$T = \tau = 2\pi \sqrt{\frac{I_{K,S} + m \cdot l^2}{l \cdot m \cdot g}}$$

2.25 Drehimpuls / Drall

2.25.1 Definition

Mit fixer Drehachse:

$$\vec{L}_{\parallel} = I \cdot \vec{\omega} \quad \text{Drehachse parallel zu } \vec{L}_{\parallel} \quad (94)$$



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \text{mit} \quad \vec{p} = m \cdot \vec{v} \quad (95)$$

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \vec{L}_i \quad (96)$$

2.25.2 Drehimpulserhaltung

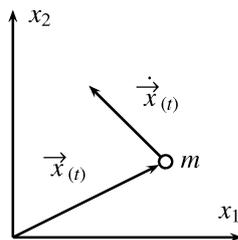
Analog zu $\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \vec{F}$

$$\frac{\partial \vec{L}}{\partial t} = \vec{T} \quad (97)$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$$

2.25.3 Zentralproblem



$$m \cdot \ddot{\vec{x}} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \cdot f(|\vec{x}|) \quad (98)$$

$f < 0 \rightarrow$ Anziehung

$f > 0 \rightarrow$ Abstossung

Teil II

Hydromechanik

3 Definitionen

3.1 Hydrostatik

Lehre vom Kräftegleichgewicht in ruhenden Flüssigkeiten.

3.2 Hydrodynamik

Lehre vom Strömungsgesetzen in bewegten Flüssigkeiten.

3.3 Dichte ρ

$$\rho = \frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}} = \frac{\partial M}{\partial V} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \quad (99)$$

3.4 Spezifisches Gewicht γ

$$\gamma = \frac{\text{Gewicht}}{\text{Volumen}} = \frac{\partial G}{\partial V} = \frac{\partial m \cdot g}{\partial V} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right] \quad (100)$$

$$\gamma = g \cdot \rho \quad (101)$$

3.5 Druck p

$$p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} = \frac{\partial F_N}{\partial A} \quad (102)$$

3.5.1 Einheiten des Druckes

$$1Pa = 1 \frac{N}{m^2} \quad (\text{Pascal})$$

$$1bar = 10^5 Pa$$

$$1atm = 1.01325bar \quad (\text{Normaldruck auf Meereshöhe})$$

$$= 760mmHg$$

$$1torr = 1mmHg \quad (0^\circ C)$$

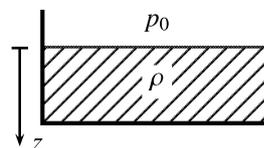
$$= 1.3332 \cdot 10^2 Pa$$

$$1at = 10mH_2O \quad (\text{bei } 4^\circ C)$$

$$= \frac{kp}{cm^2}$$

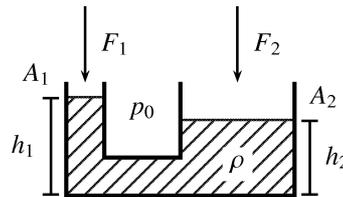
4 Druck

4.1 Schweredruck



$$p_{(z)} = \frac{\partial F}{\partial A} = p_0 + \rho \cdot g \cdot z \quad (103)$$

4.2 Hydrostatische Übersetzung



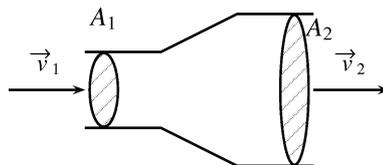
$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{F_2}{F_1} + \frac{A_2}{A_1} \cdot \rho \cdot g \cdot (h_2 - h_1) \quad (104)$$

4.3 Auftrieb F_A (Archimedes)

Der Auftrieb F_A ist dem Betrag nach gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit. Die Luft kann eigentlich vernachlässigt werden.

- \vec{F}_A ist parallel zum vorhandenen Beschleunigungsfeld (im Allgemeinen \vec{g}).
- Angriffspunkt von F_A ist der Schwerpunkt der **verdrängten Flüssigkeit**.

4.4 Bernoulli



$$v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{A_2}{A_1} \quad (105)$$

$$p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 + \rho \cdot h_1 \cdot g = p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 + \rho \cdot h_2 \cdot g \quad (106)$$

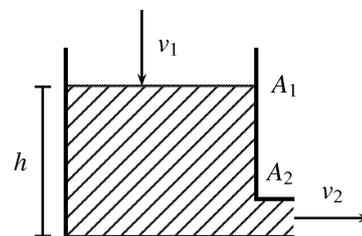
Gilt nur für eine Stromlinie einer inkompressiblen Flüssigkeit.

Erklärung:

$$\underbrace{p_1}_{\text{Betriebsdruck}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2}_{\text{dyn. Druck, Staudruck}} + \underbrace{\rho \cdot h \cdot g}_{\text{Schweredruck}}$$

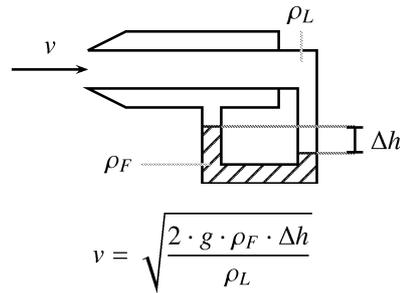
wobei: *Betriebsdruck*+*Schweredruck*=*Statischer Druck*

4.5 Ausflussgeschwindigkeit



$$\frac{A_1}{A_2} \gg 1 \quad \text{das heisst} \quad v_1 \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \quad (107)$$

4.6 Pitot-Rohr



5 Widerstand

5.1 Reibungswiderstand

Der Reibungswiderstand is proportional zur Geschwindigkeit.

$$F_r = 6 \cdot \pi \cdot r \cdot v \cdot \eta \quad (109)$$

$$\eta \left[\frac{N \cdot s}{m} = \frac{kg}{m \cdot s} \right] \quad : \text{Viskosität}$$

$$\eta_{\text{Luft}} = 1.8 \cdot 10^{-5} \left[\frac{kg}{m \cdot s} \right]$$

5.1.1 Beispiel: Regentropfen

v_0 : stationäre Fallgeschwindigkeit

$$v_0 = \frac{2 \cdot r^2 \cdot g \cdot (\rho_{\text{Wasser}} - \rho_{\text{Luft}})}{9 \cdot \eta_{\text{Luft}}}$$

5.2 Druckwiderstand

Dominant bei turbulenter Strömung

$$F_D = c_D \cdot A \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \quad (110)$$

A : Querschnitt bezüglich Bewegungsrichtung
 c_D : Druckwiderstandsbeiwert, Formfaktor
 ρ : Dichte des Mediums

5.3 Gesamtwiderstand

$$F_W = F_r + F_D \quad \Rightarrow \quad F_W = c_W \cdot A \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \quad (111)$$

c_W : Widerstandsbeiwert, Abhängig von der Geschwindigkeit. Konstant wenn $F_r \ll F_D$



5.4 Reynold'sche Zahl

$$Re = \frac{\hat{l} \cdot \rho \cdot v}{\eta} \quad (112)$$

mit

$$\hat{l} = \frac{4 \cdot A}{u} \quad : \text{ charakteristische Grösse, hydrodynamischer Durchmesser}$$

u : Umfang

$$Re_{kritisch} \approx 2300$$

Teil III

Wärmelehre

6 Definitionen

6.1 Wärmemenge Q

$$\dot{Q} = P \quad \Delta Q = P \cdot \Delta t \quad (113)$$

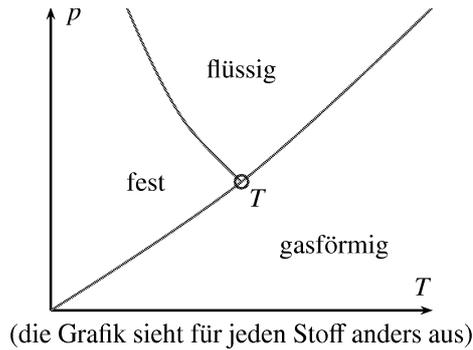
Bremswärme:

$$\Delta Q = F_R \cdot s = m \cdot g \cdot \mu_G \cdot s = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

6.2 Tripelpunkt

Trippelpunkt von H_2O : $273.16K$, $0.0076^\circ C$ und $4.6mmHg$

Im Trippelpunkt herrscht Koexistenz von festem, flüssigem und gasförmigem Zustand.



6.3 Spezifische Wärme

$$\Delta Q^\sphericalangle = c \cdot m \cdot \Delta T \quad (114)$$

$$c = \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial Q^\sphericalangle}{\partial t} \quad \left[\frac{J}{kg \cdot K} \right] : \text{spezifische Wärme}$$

ΔQ^\sphericalangle [J] : dem System zugeführte Wärmeenergie
 ΔT [K] : Temperaturänderung

Stoff	c
Wasser	4182
Eis	2100
Eisen	465
Aluminium	896

6.4 Kalorie

$1cal$: Wärmemenge um $1ml$ Wasser von $14.5^\circ C$ auf $15.5^\circ C$ zu erwärmen.

$1kcal = 4185.5J$

6.5 Mischen

$$T_0 = \frac{c_1 \cdot m_1 \cdot T_1 + c_2 \cdot m_2 \cdot T_2}{c_1 \cdot m_1 + c_2 \cdot m_2} \quad (115)$$

c_i : spezifische Wärme

m_i : Masse

T_i : abs. Temperatur (in K)

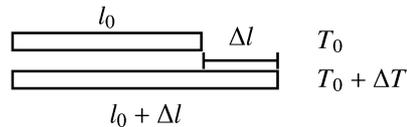
6.6 Spezifische Wärme für Gase

$$c_p = \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial Q}{\partial T} \quad \text{für } p = \text{konstant} \quad (116)$$

$$c_v = \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial Q}{\partial T} \quad \text{für } V = \text{konstant} \quad (117)$$

$$c_p > c_v \quad (118)$$

6.7 Längenausdehnung



$$\Delta l = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta T \quad (119)$$

$$l = l_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T) \quad (120)$$

6.8 Volumenausdehnung

$$V = V_0 \cdot (1 + \gamma \cdot \Delta T) \quad \text{mit } \gamma \approx 3 \cdot \alpha \quad (121)$$

$$V = l^3 = l_0^3 (1 + \alpha \cdot \Delta T)^3 \quad \text{Annahme: } \alpha \cdot \Delta T \ll 1 \quad \Rightarrow \quad V = V_0 (1 + 3\alpha \cdot \Delta T) \quad (122)$$

6.9 Ideales Gas

Isobar: p konstant (Gay Lussac)

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad (123)$$

Isochor: V konstant (Amonton)

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad (124)$$

Isotherm: T konstant (Boyle Mariotte)

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_1}{V_2} \quad (125)$$

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{p_2}{\rho_2} \quad (126)$$

Verkettung

$$\frac{V_1 \cdot p_1}{T_1} = \text{konstant} \quad (127)$$

6.10 Stoffmenge in $kmol$

Die Lochmidt'sche Zahl L ist gleich der Anzahl der Atome in $12kgC_6^{12}$ (6 Protonen, 6 Neutronen, 6 Elektronen, Bindungsenergie):

$$L = 6.023 \cdot 10^{26}$$

$$m = n \cdot M$$

m : Masse

n : Anzahl $kmol$

M : Masse eines $kmol$

Molekül	M
C_6^{12}	12
H^1	1
1He	4
H_2O	18
Luft (N_2, O_2)	29

6.11 Zustandsgleichung

$$p \cdot V = n \cdot R_M \cdot T \quad (128)$$

T : absolute Temperatur

V : Volumen

n : Anzahl *kmol*

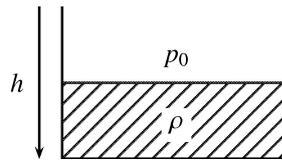
p : Druck

$$R_M : \text{molare Gaskonstante} = 8.314 \cdot 10^3 \left[\frac{J}{\text{kmol} \cdot K} \right]$$

R_M ist Gasartunabhängig

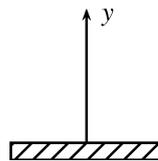
$$p = \rho \cdot R \cdot T \quad \text{und} \quad p \cdot V = m \cdot R \cdot T \quad \text{mit} \quad R = \frac{R_M}{M}$$

6.12 Luftdruckabnahme in Atmosphäre



$$p_{(h)} = \rho \cdot g \cdot h + p_0 \quad (129)$$

$$dp = \rho \cdot g \cdot dh \quad \text{auch gültig wenn } \rho_{(h)} \quad (130)$$



$$dp = -\rho_{(y)} \cdot g \cdot dy \quad (131)$$

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{p}{R \cdot T} \cdot g \quad (132)$$

$$p_{(y)} = p_0 \cdot e^{-\frac{g}{R \cdot T} \cdot y} \quad T \text{ konstant für alle } y \text{ (gute Näherung)} \quad (133)$$

$$p_{(y)} = \rho_0 \cdot R \cdot T_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0 \cdot g \cdot y}{p_0}} \quad (134)$$

7 Kinetische Gastheorie

7.1 Gas aus n Molekülen (Punktmassen)

Kinetische Energie eines Teilchens:

$$E_i = \frac{\mu_i}{2} \cdot v_i^2$$

mit μ_i als Masse eines Teilchens.

$$p_i = \frac{\mu \cdot \|\vec{v}_i\|^2}{V} \quad (135)$$

$N = n \cdot L$ für n kmol eines Gases

$$p_{total} = \frac{N \cdot \mu}{3 \cdot V} \cdot \overline{v^2} \quad (136)$$

Mittlere kinetische Energie eines Teilchens:

$$E = \frac{3}{2} \cdot k_B \cdot T \quad \text{mit} \quad k_B = \frac{R_M}{L} \quad (137)$$

k_B : Boltzmann'sche Konstante

$$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \quad \left[\frac{J}{K} \right]$$

7.2 Mehratomige Moleküle

Jeder zusätzliche Freiheitsgrad liefert $\frac{1}{2}k_B T$ kinetische Energie = *Aquipartitionsgesetz*

$$E_{kin} = \frac{f}{2} \cdot k_B \cdot T = \frac{f}{2} \cdot \frac{R_M}{L} \cdot T \quad (138)$$

f : Freiheitsgrade	Anzahl Atome
3	1
5	2
6	> 2

7.3 Innere Energie U eines Gases

$$U = n \cdot L \cdot E_{kin} \quad (139)$$

$$= n \cdot L \cdot \frac{f}{2} \cdot k_B \cdot T \quad (140)$$

$$= n \cdot R_M \cdot \frac{f}{2} \cdot T \quad (141)$$

$$= \frac{f}{2} \cdot p \cdot V \quad (142)$$

7.4 Gasgemische

$$M = \frac{n_1 \cdot M_1 + n_2 \cdot M_2}{n_1 + n_2} \quad (143)$$

7.5 Gesetz von Dalton

Der Druck eines Gasgemisches ist gleich der Summe der Partialdrücke:

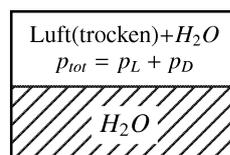
$$p = (\rho_1 \cdot R_1 + \rho_2 \cdot R_2) \cdot T \quad (144)$$

$$p = (\rho_1 + \rho_2) \cdot \bar{R} \cdot T \quad (145)$$

mit

$$\bar{R} = \frac{R_M}{M} \quad \text{und} \quad \bar{M} = \frac{n_1 \cdot M_1 + n_2 \cdot M_2}{n_1 + n_2} = \frac{\sum_i n_i \cdot M_i}{\sum_i n_i}$$

7.6 Relative Feuchtigkeit ϕ



p_L : Druck trockener Luft

p_D : Dampfdruck

Nach Dalton: $p_f = p_L + p_D$ (p_f : feuchte Luft)

Relative Feuchtigkeit $\phi(T)$:

$$0 \leq \phi(T) = \frac{p_D}{p_s(T)} \leq 1 \quad (146)$$

p_s : Sättigungsdruck, H_2O :

$$p_s(0^\circ) = 611 \text{ Pa}$$

$$p_s(20^\circ) = 2357 \text{ Pa}$$

$$p_s(100^\circ) = 1.01325 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ atm}$$

8 Thermodynamik

8.1 1. Hauptsatz

Q^\nearrow : die vom System an die Umgebung abgegebene Wärme

Q^\swarrow : die vom System von der Umgebung aufgenommene Wärme

$$\implies Q^\nearrow = -Q^\swarrow \quad (147)$$

dito für W : $W^\nearrow = -W^\swarrow$

$$\Delta U = Q^\swarrow + W^\swarrow$$

Die vom System aufgenommene Wärme Q^\swarrow und Arbeit W^\swarrow erhöht die innere Energie U des Systems um ΔU .

Isochor

$$C_V = \frac{1}{2} f \cdot R_M$$

- Gasart unabhängig
- Atomgewichtsunabhängig

Isobar

$$\begin{aligned} C_p &= \frac{f}{2} \cdot R_M + R_M \\ &= R_M \left(1 + \frac{f}{2} \right) \\ &= C_V + R_M \\ f &= \{3, 5, 6\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_p &> C_V \\ \Delta U &= n \cdot C_V \cdot \Delta T & \Delta U &\neq n \cdot C_p \cdot \Delta T \\ c_p &= \frac{C_p}{M} & c_V &= \frac{C_V}{M} \\ C_p &= C_V + R_M & c_p &= c_V + R \end{aligned}$$

8.2 Adiabatische (isentropen) Prozesse

Dies sind Zustandsänderungen mit $\Delta Q = 0$. Es gilt immer noch: $pV = nR_M T$

$$\chi = \frac{c_p}{c_V} = \frac{C_p}{C_V} = \frac{C_V + R_M}{C_V} = 1 + \frac{R_M}{C_V} \quad \text{mit} \quad C_V = \frac{f}{2} \cdot R_M \quad (148)$$

$$\chi = 1 + \frac{2}{f} \quad (149)$$

$$T_1 \cdot V_1^{\chi-1} = T_2 \cdot V_2^{\chi-1} \quad \text{dabei} \quad T \cdot V^{\chi-1} = \text{konstant}$$

$$p_1 \rightarrow p_2 \quad : \text{Berechnung mit } pV = nR_M T$$

$$T \cdot p^{\frac{1-\chi}{\chi}} = \text{konstant} \quad (V_1 = V_2)$$

$$p \cdot V^\chi = \text{konstant} \quad (T_1 = T_2)$$

Bemerkungen

- Streng adiabatische Wände gibt es nicht.
- Grosse Systeme → kleine Oberflächen (⇒ adiabatisch)
- Schnelle Zustandsänderungen (Beispiel: Kolbenmotor)
- Schallgeschwindigkeit:

$$c_{Gas} = \sqrt{\chi \cdot R \cdot T}$$

Die Abhängigkeit ist für \bar{V}_{Gas}^2 und C_{Gas}^2 die Gleiche.

8.3 Kreisprozesse

Rechtsläufiger Kreisprozess gibt Arbeit an Umwelt ab.

$$W^\nearrow = \oint p dV = \oint dW > 0 Q_{\text{zykl.}}^\nearrow = W_{\text{zykl.}}^\nearrow \quad (150)$$

8.4 2. Hauptsatz

Ohne Aufwendung von äusserer Arbeit strömt Wärme niemals von einem kälteren zu einem wärmeren Niveau.

8.5 Carnot-Zyklus

Dies ist ein idealer, reversibler Zyklus.

8.6 Wärme-Kraft-Maschine

Die Fläche unter \oint ist positiv. Rechtsläufiger Kreisprozess. Q fliesst von Warm nach Kalt.

8.7 Thermodynamischer Wirkungsgrad

$$\eta_{th} = \frac{Q_3^\nearrow - Q_1^\nearrow}{Q_3^\nearrow} = 1 - \frac{Q_1^\nearrow}{Q_3^\nearrow} \quad (151)$$

Für nur reversible Prozesse gilt zusätzlich:

$$\eta_c = \eta_{ideal} = \eta_{rev.} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad (152)$$

8.8 Arbeitsmaschine, Wärmepumpe

Linksläufiger Kreisprozess. Fläche unter \oint ist positiv. Q fliesst von Kalt nach Warm unter Zuführung von äusserer Arbeit.

8.9 Leistungszahl COP

(COP = coefficient of performance)

$$\epsilon_w = \frac{Q_3^\nearrow}{Q_3^\nearrow - Q_1^\nearrow} = \frac{1}{1 - \frac{Q_1^\nearrow}{Q_3^\nearrow}} = \frac{1}{\eta_{th}} \quad (153)$$

Für reversible Prozesse gilt zusätzlich:

$$\epsilon_w = \frac{1}{\eta_c} = \frac{T_3}{T_3 - T_1} \quad (154)$$

9 Wärmeleitung

λ : Wärmeleitungsahl

Wärmeleitungsgleichung nach Fourier:

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{dT}{dx} \quad \lambda \left[\frac{W}{m \cdot K} \right] \quad (155)$$

A : Querschnitt

T : absolute Temperatur

9.1 Wärmestromdichte

$$\rho_Q \cdot v = -\lambda \frac{dT}{dx} \quad J = -\lambda \frac{dT}{dx} = \rho_Q \cdot v \quad (156)$$

v : Propagation der Wärmedichte

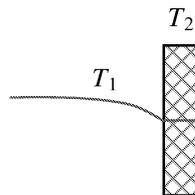
Verallgemeinerung

$$\vec{J} = -\lambda \cdot \text{grad}(T_{(x,y,z)}) \quad (157)$$

9.2 Wärmeübergang

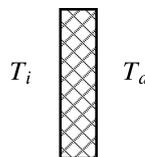
α : Wärmeübergangszahl

$$J = \frac{dQ}{dt \cdot A} = \alpha \cdot \Delta T \quad \text{mit } \Delta T = T_1 - T_2 \quad (158)$$



Material	λ
Diamant	600
Kupfer	384
Beton	1
Luft	0.026
Eisen	74

k : Wärmedurchgangszahl

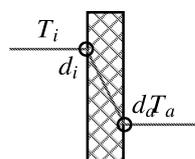


$$T_i > T_a \quad \Delta T = T_i - T_a$$

$$J = \frac{dQ}{dt \cdot A} = k \cdot \Delta T = k \cdot (T_i - T_a) \quad (159)$$

zweifaches Isolierglas: $k = 3.0$

Wärmedämmglas: $k = 1.3$



$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_i} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_a} \quad (160)$$

Teil IV

Wellenlehre

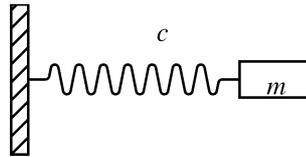
10 Schwingung

Endlich grosse Störung eines Systems aus der Ruhelage. Sie propagiert **nicht!**

Spezialfall: harmonische Schwingung

$$\begin{aligned}
 y(t) &= A \cdot \cos(\omega t + \delta) \\
 \omega &= 2 \cdot \pi \cdot \nu \\
 T_p &= \nu^{-1} \\
 \delta &= \text{Nullphasenwinkel, Anphasenwinkel} \\
 A &= \text{Amplitude}
 \end{aligned}$$

10.1 Erzwungene und gedämpfte Schwingung



$$m \cdot \ddot{y}(t) = F_{Feder} + F_{Reib} + F_{Erzwingen} \quad (161)$$

$$\begin{aligned}
 F_{Feder} &= -c \cdot y(t) \\
 F_{Erzwingen} &= F_0 \cdot \cos(\omega_E \cdot t) \\
 F_{Reib} &= -a \cdot \frac{\dot{y}}{|\dot{y}|} \quad \text{Gleitreibung} \\
 &= -b \cdot \dot{y} \quad \text{Viskosereibung} \\
 &= -\tilde{b} \cdot (\dot{y})^2 \cdot \frac{\dot{y}}{|\dot{y}|} \quad \text{Druckwiderstand, z.B. Luft} \approx -v^2
 \end{aligned}$$

bei $F_{Reib} = -b\dot{y}$:

$$m\ddot{y} = -cy - b\dot{y} + F_0 \cdot \cos(\omega_E \cdot t) \quad \omega_0^2 = \frac{c}{m} \quad D = \frac{b}{2 \cdot \omega_0 \cdot m} \quad (162)$$

ω_0 : Schwingungsfrequenz des freien Oszillators

D : Dämpfungsgrad

$$\ddot{y} = -\omega_0^2 \cdot y - w\omega_0 \cdot D \cdot \dot{y} + \frac{F_0}{m} \cos(\omega_E \cdot t)$$

freier Oszillator: $D = F_0 = 0$

$$\begin{aligned}
 \ddot{y} &= -\omega_0^2 \cdot y \quad (\text{homogene Differentialgleichung}) \\
 \implies y(t) &= C \cdot \cos(\omega t + \phi) \\
 \implies y(t) &= A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t)
 \end{aligned}$$

C, ϕ bzw. A, B sind Anfangsbedingungen.

Anfangsbedingung: $F_E \neq 0, D = 0$

$$y(t) = \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega_E^2} \cos(\omega_E t) + C \cdot \cos(\omega_0 t + \delta) \quad (163)$$

Anfangsbedingung: $F_E \neq 0, D \neq 0$

$$y(t) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2 \cdot D \cdot \omega_0 \cdot \omega_E)^2}} \cos(\omega_E t + \delta) \quad (164)$$

11 Wellen

Ausbreitung

$$\begin{aligned}x' &= x - vt \\x &= x' + vt \\ \implies y_{(x,t)} &= y_0 \cdot (x - vt)\end{aligned}\tag{165}$$

$\frac{dx}{dt} = v$: Propagationsgeschwindigkeit der Störung

$$y_{t(x)} = y_{(x,t)} = y_0 \cdot (x \mp vt)$$

In 2 und 3 Dimensionen gibt es eine Raumdämpfung:

$$\frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 y_{(x,t)}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y_{(x,t)}}{\partial x^2}\tag{166}$$

$$\frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 y_{(x_1, x_2, x_3, t)}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2}\tag{167}$$

11.1 Harmonische Welle

$$y_{(x,t)} = A \cdot \cos(k \cdot (x - vt))\tag{168}$$

In 3 Dimensionen werden x und k zu den Vektoren \vec{x} und \vec{k} . \vec{k} ist der Wellenvektor, zeigt in Richtung der Wellenausbreitung.

$$T = \frac{2\pi}{k \cdot v} \quad \frac{1}{T} = v = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{k \cdot v}{2\pi} \implies \omega = k \cdot v\tag{169}$$

$$v \cdot \lambda = v\tag{170}$$

11.2 Ausbreitungsgeschwindigkeit

11.2.1 Transversalwellen

Seilwelle

$$v = \sqrt{\frac{z}{\mu}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}\tag{171}$$

z : Zugkraft

$\mu = \frac{m}{l}$: "Längen-Massen-Dichte"

ρ : Dichte

$\sigma = \frac{z}{A}$: Zugspannung

A : Querschnitt

Wasserwellen $h \ll \lambda$

$$v = \sqrt{g \cdot h} \quad h : \text{Tiefe}\tag{172}$$

Elektromagnetische Wellen

$$\lambda \cdot v = c = 3 \cdot 10^8 \left[\frac{m}{s} \right]\tag{173}$$

Sie ist immer transversal falls keine Randbedingungen.

11.2.2 Longitudinalwellen

Schallwellen im Gas

$$v = \sqrt{\chi \cdot R \cdot T} \quad R = \frac{R_M}{M} \quad \chi = \frac{c_p}{c_v}\tag{174}$$

Schallwellen im Stab

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad E : \text{Elastizitätsmodul} \quad (175)$$

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \quad (176)$$

11.3 Dopplereffekt

11.3.1 Stehende Quelle, Bewegter Beobachter

$$v' = v \left(1 \mp \frac{u}{v} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \text{ weg von Quelle} \\ + \text{ zu Quelle} \end{array} \right. \quad (177)$$

$$\frac{\Delta v}{v} = \mp \frac{u}{v} \quad (178)$$

u : Geschwindigkeit Beobachter
 v : Wellenausbreitungsgeschwindigkeit

11.3.2 Bewegte Quelle, Stehender Beobachter

$$v' = v \frac{1}{1 \pm \frac{u}{v}} \quad \left\{ \begin{array}{l} - \text{ weg von Beobachter} \\ + \text{ zu Beobachter} \end{array} \right. \quad (179)$$

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\pm \frac{u}{v}}{1 \pm \frac{u}{v}} \quad (180)$$

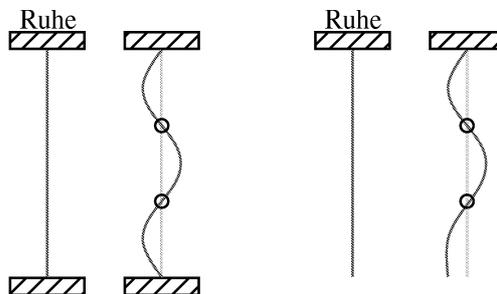
11.3.3 Dopplereffekt für el. magn. Wellen

$$v' = v \frac{\sqrt{1 \mp \frac{u}{c}}}{1 \pm \frac{u}{c}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{weg: Zeichen oben} \\ \text{zu: Zeichen unten} \end{array} \right. \quad (181)$$

Für $u \ll c \implies \frac{\Delta v}{v} \approx \pm \frac{u}{v}$

11.4 Stehende Wellen

Verschiedene Randbedingungen können zu stehender Welle führen:



$$y(0,t) = 0 \quad \forall t$$

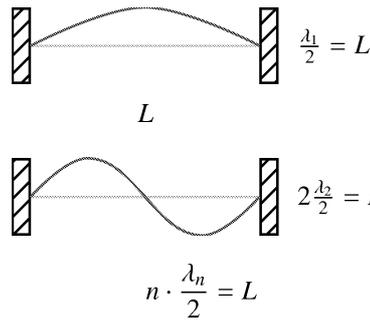
$$y(l,t) = 0 \quad \forall t$$

$$y(0,t) = 0 \quad \forall t$$

$$\frac{dy(l,t)}{dx} = 0 \quad \forall t$$

Stehende Welle = Schwingung

11.5 Stehende Welle auf Saite



(182)

- $n = 1$: Grundschiwingung, 1. Harmonische
- $n = 2$: 1. Oberschiwingung, 2. Harmonische
- $n = 3$: 2. Oberschiwingung, 3. Harmonische

Bedingung für $v_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{n \cdot v}{2 \cdot L}$

11.6 Anregfrequenzen für Eigenschwiwingungen

$$v_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{z}{\mu}} \quad \mu = \rho \cdot A \quad z : \text{Zugkraft} \quad (183)$$

11.7 Stehende Welle in Luftsäule

11.7.1 Geschlossene Pfeife

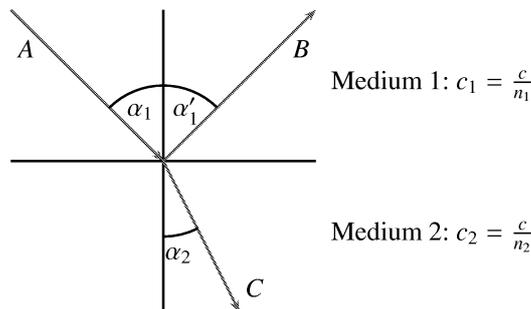
$$L = \frac{\lambda}{4} + n \cdot \frac{\lambda}{2} \quad f_i \text{ mit } i = 1, 3, 5, 7, \dots \quad (184)$$

11.7.2 Offene Pfeife

$$L = n \cdot \frac{\lambda}{2} \quad f_i \text{ mit } i = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (185)$$

12 Reflexion und Brechungsgesetz

12.1 Allgemein



$n_1 < n_2$: Brechungsindices

- A : einfallender Strahl
- B : reflektierter Strahl
- C : gebrochener Strahl

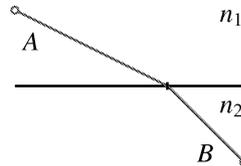
$$\alpha_1 = \alpha'_1$$

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \underbrace{\frac{n_2}{n_1}}_{\text{nur für Licht}} = \underbrace{\frac{c_1}{c_2}}_{\text{allgemein gültig}} \quad (186)$$

Totalreflexion wenn: $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \sin(\alpha_2) = \frac{n_1}{n_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

12.2 Prinzip von Fermat



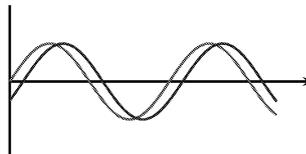
Der Strahl von A nach B wählt den schnellsten Weg.

13 Interferenz

13.1 Kohärenz

Kohärenz ist wenn zwei Bedingungen gelten:

- gleiche Frequenz
- konstante Phasenverschiebung



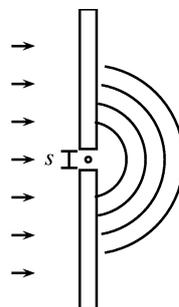
$$y = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

(187)

- Vollständige Verstärkung: $\Delta = n \cdot \lambda$
- Vollständige Auslöschung: $\Delta = \frac{\lambda}{2} + n \cdot \lambda$

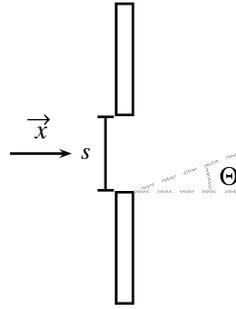
$\Delta =$ Gangunterschied

13.2 Beugung am Spalt



es gilt: $s \ll \lambda$

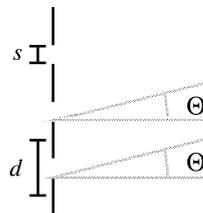
Jeder Punkt der virtuellen Grenzfläche dient als Ursprung einer sekundären Kugelwelle. Gesamterregung \rightarrow Superposition.



es gilt: $\lambda < s$

$$\frac{A}{s} \cdot \frac{\lambda}{2\pi \sin(\Theta)} \cdot 2 \sin\left(\frac{\pi \cdot s \cdot \sin(\Theta)}{\lambda}\right) \cdot \cos\left(\phi_{(t)} + \frac{\pi \cdot s \cdot \sin(\Theta)}{\lambda}\right) \tag{188}$$

13.3 Beugung am Gitter



Richtung von max. Verstärkungen:

$$\sin(\Theta) = \frac{n \cdot \lambda}{d} \quad \text{für } \pm n = 0, 1, 2, \dots \tag{189}$$

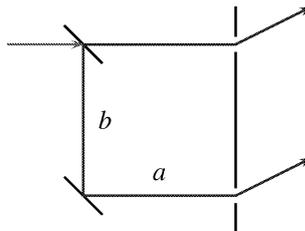
Richtung von Auslöschungen:

$$\sin(\Theta) = \frac{n \cdot \lambda}{d \cdot N} \quad \text{für } n \neq iN \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (n \bmod N \neq 0) \tag{190}$$

14 Ergänzungen

14.1 Koinzidenz

Koinzidenz wenn: Wellenzug > Gangdifferenz (Gangdifferenz $\Delta = b + c$)



14.2 Addition

Definition Intensität:

$$I_{(t)} = y^2 \tag{191}$$

$$\bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T I_{(t)} dt \tag{192}$$

$$y_1 = A_1 \cdot \sin(\omega t)$$

$$y_2 = A_2 \cdot \sin(\omega t)$$

Kohärente Addition

$$\bar{I}_{koh.} = \frac{1}{2} (A_1 + A_2)^2 \tag{193}$$

Inkohärente Addition

$$\bar{I}_{inkoh.} = \frac{1}{2} A_1^2 + \frac{1}{2} A_2^2 \tag{194}$$

Teil V
Elektro

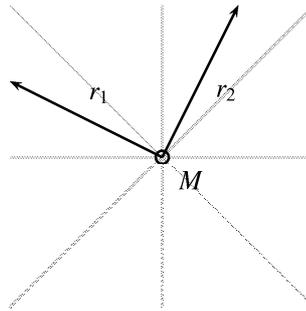
15 Felder

15.1 Gravitationsfeld

$$\vec{g}_{(\vec{r})} = -\frac{G \cdot M \cdot \vec{r}}{r^3} \quad \text{Zentralsymmetrischer Fall} \quad (195)$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \left[\frac{N \cdot m}{kg^2} \right]$$

$$\vec{F} = \frac{G \cdot M \cdot m \cdot (\vec{r}_M - \vec{r})}{\|\vec{r}_M - \vec{r}\|^2} \quad \text{Allgemeiner Fall} \quad (196)$$



$$\|\vec{g}_{(\vec{r}_2)}\| = \|\vec{g}_{(\vec{r}_1)}\| \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad (197)$$

15.1.1 Verallgemeinerung

$$\vec{g}_{(\vec{r})} = G \cdot \sum_{i=1}^N M_i \cdot \frac{\vec{r}_i - \vec{r}}{\|\vec{r}_i - \vec{r}\|^3} \quad \text{Zentralproblem} \quad (198)$$

$$\vec{g}_{(\vec{r})} = G \cdot \int \frac{\rho(\vec{x}) \cdot (\vec{x} - \vec{r})}{\|\vec{x} - \vec{r}\|^3} dV \quad (199)$$

15.2 Feldfluss

$$\text{Feldfluss } \vec{F}_{(\vec{r})} = \rho_{(\vec{r})} \cdot \vec{v}_{(\vec{r})} \quad (200)$$

15.2.1 Definition durch orientierte Fläche

$$\partial\phi_{d\vec{a}} = \vec{F}_{(\vec{r})} \cdot d\vec{a} \quad (201)$$

$$\partial\phi_{d\vec{a}} = \vec{F}_{(\vec{r})} \cdot \underbrace{\hat{n}}_{\text{normierter Normalenvektor}} \cdot da \quad (202)$$

$$\phi = \hat{n} \cdot \vec{v} \cdot A \quad (203)$$

15.2.2 Verallgemeinerung

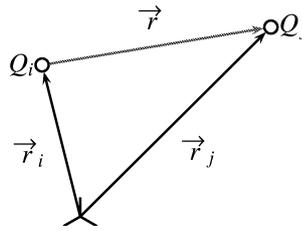
$$\phi_A = \int_{\underbrace{\partial A}_{\text{Rand der Fläche}}} \vec{F}_{(\vec{r})} d\vec{a} \quad (204)$$

15.3 Definitionen

15.3.1 Elektrische Ladung

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \left[\frac{C^2}{N \cdot m^2} \right] \quad (205)$$

Ladung eines Elektrons: $1.6 \cdot 10^{-19}$ [C]



$$\vec{F}_{ij} = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q_i \cdot Q_j \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^3} \quad (206)$$

15.3.2 Elektrisches Feld

$$\vec{F}_{ij} = Q_j \cdot \vec{E}_i \quad (207)$$

$$\vec{E}_{i(\vec{r})} = \frac{Q_i \cdot \vec{r}}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^3} \quad (208)$$

Feldrichtung : Richtung von \vec{E} ist die Richtung der Kraft die eine positive Probeladung erfährt.

15.4 Satz von Gauss

$$\phi_{Kugel} = \int_{\partial Kugel} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (\text{Radiusunabhängig!}) \quad (209)$$

$$\vec{E}_{(\vec{r})} = \int_V \frac{\rho_e(\vec{x}) \cdot (\vec{r} - \vec{x})}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \|\vec{r} - \vec{x}\|^3} dV \quad (210)$$

Gauss in Integralform

$$\phi_{\partial V} = \int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{innen}}{\epsilon_0} \quad (211)$$

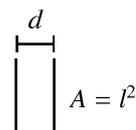
$$Q_{innen} = \int_V \rho_e(\vec{x}) dV \quad (212)$$

Gauss in Differentialform

$$\left(\vec{E}\right)' = \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial z} \quad \epsilon_0 \cdot \left(\vec{E}\right)' = \rho_e \quad (213)$$

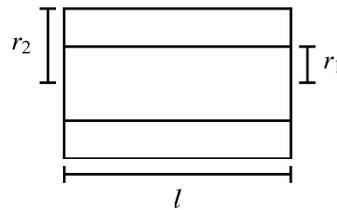
15.5 Elektrische Ladung: Beispiele

15.5.1 Plattenkondensator



$$E = \frac{Q}{A \cdot \epsilon_0} \quad (214)$$

15.5.2 Zylinderkondensator



$$\vec{E} = \frac{-\lambda_e \cdot \hat{r}}{2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} \quad \text{mit} \quad \lambda_e = \frac{|Q|}{l} \quad E \sim \frac{1}{r^{n-1}} \quad (215)$$

16 Elektrische Spannung

$$U_{AB} = \frac{W_{AB}}{Q_{Proto}^+} = \int_A^B \vec{E} d\vec{s} \quad (216)$$

$$U_{(r)} = \underbrace{\int_r^\infty \vec{E} d\vec{s}}_{\text{Allgemein}} = \underbrace{\frac{Q_{erz}^+}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}}_{\text{Kugelsymmetrie}} \quad (217)$$

$$\text{grad}(U_{(r)}) = -\vec{E} \quad (218)$$

Bemerkungen

- $\int \vec{E} d\vec{s}$ ist Wegunabhängig
- $U_{AB} = -U_{BA}$
- $U_{AC} = U_{AB} + U_{BC}$

17 Elektrostatik

17.1 Berechnung E aus U

17.1.1 Zentralsymmetrisches Feld

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (219)$$

17.1.2 Dipolfeld

$$\vec{p}_d = Q^+ \cdot \vec{d} \quad (\vec{d} \text{ zeigt von } Q^- \text{ nach } Q^+) \quad (220)$$

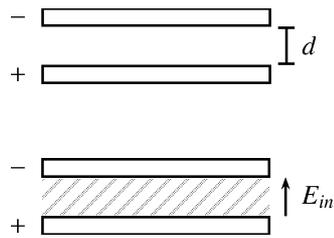
17.2 Dielektrika

Der Abstand zwischen dem Atomkern und dem Elektron ist die *Separationsdistanz* $\delta < \infty$

$$N \cdot Q \cdot \vec{\delta} = \vec{P} \quad (221)$$

- N : Anzahl Atome pro Volumen
- Q : Ladung
- δ : Separationsdistanz
- P : Polarisationsdichte (-vektor)

17.2.1 Plattenkondensator



$$C = \frac{\epsilon_0 \cdot A}{d} \quad (222)$$

$$N \cdot Q \cdot \delta = \frac{Q_{\text{Oberfl.}}}{A} = P = \sigma_{\text{pol.}} \quad (223)$$

$$P = \chi \cdot \epsilon_0 \cdot E_{\text{in}} \quad E : \text{elektrische Suszeptibilität} \quad (224)$$

$$E_{\text{in}} = \frac{\sigma_{\text{free}}}{\epsilon_0 \cdot (1 + \chi)} \quad (225)$$

$$\Rightarrow c = \frac{A \cdot \epsilon_0}{d} (1 + \chi) \quad (226)$$

$$\epsilon_r = 1 + \chi = \epsilon \quad E_{\text{in}} = \frac{E_v a c}{\epsilon} \quad (227)$$

17.3 Bewegung von Ladung im E -Feld

$$1eV = 1.6 \cdot 10^{-19} \quad [J] \quad (228)$$

$$\Delta E_{\text{kin}} = Q^+ \cdot \Delta U = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \quad (229)$$

$$\text{Masse Elektron: } 9.1 \cdot 10^{-31} \quad [kg] \quad (230)$$

17.4 Mobilität

$$\vec{v}_{\text{end}} = \mu \cdot \vec{E} \quad \left[\frac{m^2}{s \cdot V} \right] \quad (231)$$

$$\mu_{O_2^+} \approx 1 \quad \left[\frac{cm^2}{s \cdot V} \right] \quad (232)$$

17.5 Energieim Kondensator

$$W = \frac{Q^2}{2 \cdot C} = \frac{C}{2} \cdot U^2 \quad (233)$$

17.6 Energiedichte ν

$$\nu = \frac{\epsilon_0}{2} \cdot E_v^2 \quad : \text{Energiedichte im Vakuum} \quad (234)$$

$$\nu = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r}{2} \cdot E_{\text{diel}}^2 \quad : \text{Energiedichte im Dielektrikum} \quad (235)$$

$$\nu = \frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon_0}{\epsilon_r} \cdot E_v^2 \quad (236)$$

17.7 Anziehung zweier Platten

$$F = \nu \cdot A \quad A : \text{Fläche der Platten} \quad (237)$$

18 Stromstärke

$$I = \frac{\partial Q}{\partial t} = \dot{Q} \quad \left[A = \frac{C}{s} \right] \quad (238)$$

$$\vec{j} = \rho \cdot \vec{v} \quad : \text{Landugnsfluss, Stromdichte} \quad (239)$$

19 Ohm'sches Gesetz

$$U = R \cdot I \quad [V = \Omega \cdot A] \quad (240)$$

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} \quad (241)$$

$$U = i \cdot \frac{l}{A \cdot \sigma} \quad R = \frac{l}{A \cdot \sigma} = \frac{\rho \cdot l}{A} \quad (242)$$

$$\sigma^{-1} = \rho \quad (243)$$

$$\rho = \frac{A \cdot R}{l} \quad (244)$$

$$\sigma = \mu \cdot \rho_e \quad (245)$$

l : Leiterlänge

A : Leiterquerschnitt

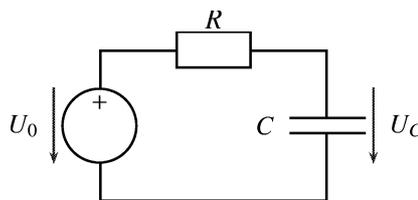
σ : spezifische Leitfähigkeit

ρ : spezifischer Widerstand

20 Zeitkonstante τ

$$\tau = R \cdot C \quad [s] \quad (246)$$

20.1 Laden und Entladen eines Kondensators



$$U_C = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad (247)$$

$$Q_{(t)} = Q_{max} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (248)$$

21 Kirchhoff

21.1 Knotenpunktsatz

$$\sum i = 0 \quad (249)$$

21.2 Maschenpotentialsatz

$$\sum u = 0 \quad (250)$$

Teil VI

Magnetismus

22 Ausdrücke

\vec{B} -Feld Magnetisches Induktionsfeld, verursacht durch Ströme (Gleichförmig bewegte Ladung)

Lorentzkraft Kraft auf bewegte Ladung, bewirkt durch das \vec{B} -Feld.

Induktion Erzeugung einer elektrischen Spannung durch zeitlich veränderliches \vec{B} -Feld.

23 Lorentzkraft

Bewegte Ladung erfährt eine Kraft, die *Lorentzkraft*:

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \quad (251)$$

mit

$$B \left[\frac{Ns}{Cm} = \frac{N}{Am} = \frac{Vs}{m^2} = Tesla \right] \quad \text{und} \quad 1Gauss = 10^{-4} [T]$$

24 Gesetz von Biot-Savart

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} \quad (252)$$

Induktionstante: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1.256 \cdot 10^{-6} \left[\frac{Tm}{A} \right]$
 $dB \sim I \quad dB \sim \frac{1}{r^2}$

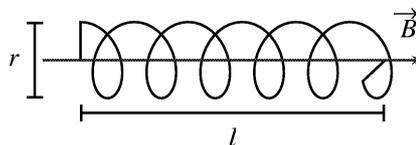
25 Gesetz von Ampère



$$\int_C \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \cdot I_{total} \quad \text{mit} \quad I_{total} = \sum_i I_i \quad (253)$$

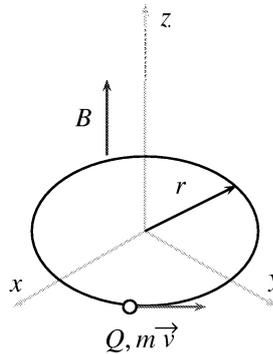
$B_{Erde} = 0.2Gauss$

25.1 Beispiel: Spule



$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi r} \quad B_{innen} = \mu_0 \cdot n \cdot I \quad \text{mit} \quad n = \frac{N}{l} \text{ Windungen} \quad (254)$$

26 Bahnkurve eines geladenen Teilchens

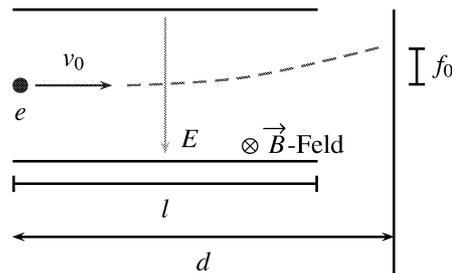


$$m \cdot \omega = Q \cdot B \quad \text{mit } v_{0z} = 0 \quad \omega \neq f(r) \quad r \sim v_0 \quad (255)$$

Zyklotron:

$$\omega = \frac{Q \cdot B}{m} = 2\pi \cdot \gamma = \frac{2\pi}{T} \quad (256)$$

27 Spezifische Ladung $\frac{e}{m}$ des Elektrons



für $B = 0$:

$$f_0 = \frac{E \cdot e \cdot l}{2 \cdot m \cdot v_0^2} (2d - l) \quad (257)$$

$$v_0^2 = \frac{E \cdot e \cdot l}{2 \cdot m \cdot f_0} (2d - l) \quad (258)$$

für $B \neq 0$ $f = 0$:

$$\frac{e}{m} = \frac{2 \cdot E \cdot f_0}{B^2 \cdot l \cdot (2d - l)} \quad (259)$$

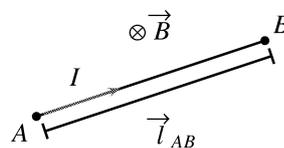
28 Kraft im hom. Magnetfeld

28.1 Auf Leiter

$$d\vec{F} = dq \cdot \vec{v} \times \vec{B} \quad (260)$$

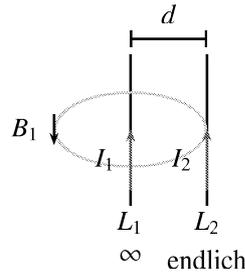
$$d\vec{F} = I \cdot d\vec{s} \times \vec{B} \quad (261)$$

Spezialfall: Leiter Geradlinig:



$$F = I \cdot \vec{l}_{AB} \times \vec{B} \quad (262)$$

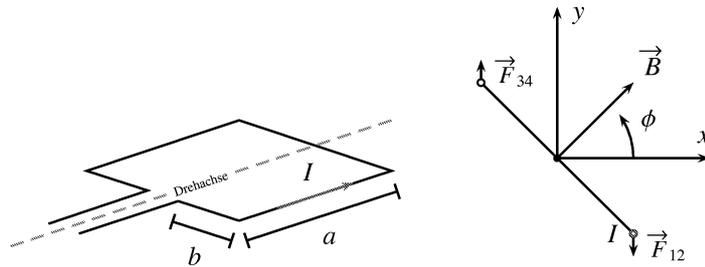
28.2 Zwischen zwei geraden, parallelen Strömen



$$B_1 = B_{ind} = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot d}$$

$$\frac{F_{12}}{l_2} = \frac{I_1 \cdot I_2 \cdot \mu_0}{2\pi \cdot d}$$

28.3 Gleichstrommotor



$$T_z = -a \cdot b \cdot I \cdot B \cdot \sin(\phi) \tag{263}$$

Für \$N\$ Windungen:

$$T_z = -A \cdot N \cdot I \cdot B \cdot \sin(\phi) \quad \text{mit } A = a \cdot b$$

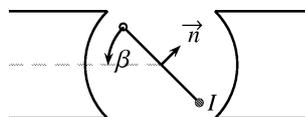
$$\Theta \cdot \ddot{\phi} = T_z = -A \cdot N \cdot I \cdot B \cdot \phi$$

Harmonischer Oszillator

$$T = I(t) \cdot N \cdot A \cdot B \cdot \sin(\phi(t))$$

$$U_{ind} = -\omega \cdot N \cdot A \cdot B \cdot \sin(\phi)$$

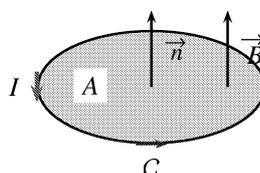
28.4 Galvanometer



$$\beta = \frac{A \cdot N \cdot I \cdot B}{D} \quad D: \text{Spiralfederkonstante} \tag{264}$$

Ausschlag proportional zu \$I\$

28.5 Drehmoment auf ebene Leiterschleife



\vec{B}	homogenes Feld
C	ebene, geschlossene Kurve
A	Fläche von C umschlossen
I	Strom durch C
\vec{n}	rechtwinklig auf A

28.5.1 Definition: Magnetisches Moment

$$\vec{m} = I \cdot A \cdot \vec{n} \quad (265)$$

28.5.2 Drehmoment um beliebigen Punkt P

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (266)$$

Für N Windungen:

$$\|\vec{T}\| = I \cdot A \cdot N \cdot B \cdot \sin(\phi) \quad (267)$$

29 Induktivität

29.1 Induktionsgesetz von Faraday

Magnetischer Fluss ϕ des \vec{B} -Feldes:

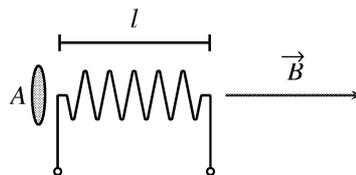
$$\phi_A = \int_A \vec{B} \cdot \vec{da} = \int_A \vec{B} \cdot \vec{n} \, da \quad [\text{Weber} = \text{Tm}^2 = \text{Vs}] \quad (268)$$

$$U_{ind} = -\dot{\phi} \quad (269)$$

Lenz'sche Regel Die induzierte Spannung erzeugt ein Induktionsstrom, der so gerichtet ist, dass er dem ihn erzeugenden Vorgang zu hemmen versucht.

29.2 Selbstinduktion

Spule im äusseren Feld:



$$U_{ind} = -N \cdot A \cdot \dot{B}_{(t)} \quad (270)$$

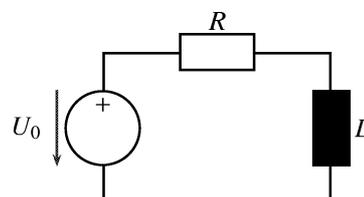
Spule im eigenen Feld, bewirkt durch I

$$U_{ind} = -\mu_0 \cdot \frac{N^2 \cdot A}{l} \cdot \dot{I}_{(t)} \quad (271)$$

Allgemein: $U_{ind} = -L \cdot \dot{I}_{(t)}$

$$L = \frac{N^2 \cdot A \cdot \mu_0}{l} \quad [\text{Henry} = \text{H}] \quad (272)$$

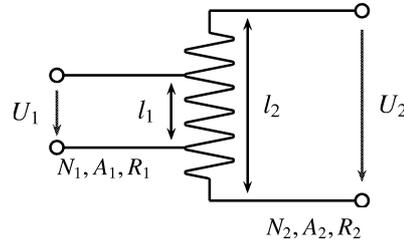
29.3 Schalten eines Stromes in einer Spule



$$I(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \quad (273)$$

$$I_{max} = \frac{U_0}{R} \quad (274)$$

29.4 Transformator



$$L_{11} = \frac{\mu_0 \cdot A_1 \cdot N_1^2}{l_1}$$

$$L_{22} = \frac{\mu_0 \cdot A_2 \cdot N_2^2}{l_2}$$

Induktion $U_{11} = -L_{11} \cdot \hat{I}_1$ und $U_{12} = -L_{12} \cdot \hat{I}_1$ mit

$$L_{12} = \frac{\mu_0 \cdot A_2 \cdot N_1 \cdot N_2}{l_1}$$

$$L_{21} = \frac{\mu_0 \cdot A_1 \cdot N_1 \cdot N_2}{l_2}$$

$$L_{12}^2 = L_{21}^2 = L_{11} \cdot L_{22}$$

$$\frac{U_1}{U_2} = -\frac{N_2}{N_1}$$

29.5 Energie des magnetischen Feldes

Aus der induzierten Spannung einer Spule

$$W_{magn} = - \int_0^T u_{ind} \cdot I dt$$

$$W_{magn} = \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2}{\mu_0} \cdot l \cdot A$$

$$W_{magn} = \frac{1}{2} \cdot \frac{B_{mat}^2}{\mu_0 \cdot \mu_r} \cdot l \cdot A$$

mit

μ_r : Permabilität

μ_0 : Induktionskoeffizient

Energiedichte:

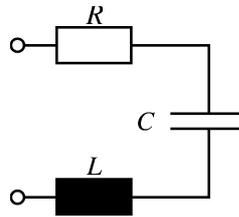
$$v_{magn} = \frac{1}{2} \cdot \frac{B_{vac}^2}{\mu_0} \cdot \mu_r$$

oder

$$v_{magn} = \frac{1}{2} \cdot \frac{B_{mat}^2}{\mu_0 \cdot \mu_r}$$

30 RCL-Kreis

$$\dot{U}(t) = L \cdot \ddot{I} + R \cdot \dot{I} + I \cdot \frac{1}{C} \quad (275)$$



allgemeine Lösung: $I = I_h + I_{ih}$

homogene Lösung:

$$\ddot{I} + \frac{1}{LC} I = 0 \quad \text{mit } R = 0 \quad (276)$$

$$L \cdot \ddot{I} + R \cdot \dot{I} + \frac{1}{C} \cdot I = 0 \quad \text{mit } R \neq 0 \quad (277)$$

$$R^2 > \frac{4L}{C} \quad \Rightarrow \quad \text{grosse Dämpfung: } \lambda_{12} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}$$

$$R^2 = \frac{4L}{C} \quad \Rightarrow \quad \text{kritisch: } \lambda_{12} = -\frac{R}{2L}$$

$$R^2 < \frac{4L}{C} \quad \Rightarrow \quad \text{kleine Dämpfung: } \lambda_{12} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{j}{2} \sqrt{-\frac{R^2}{L^2} + \frac{4}{LC}}$$

partikuläre Lösung:

$$\underline{I} = I_0 \cdot e^{j(\omega t - \phi)} \quad (278)$$

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 - \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (279)$$

Achtung: der Lösungstrick mit dem Rechnen mit komplexen Zahlen funktioniert *nur* im linearen Fall, d.h.:

$$I(\omega, t) = \underline{z}^{-1}(\omega) \cdot \underline{u}(\omega, t) \quad \text{mit } \underline{z} \text{ nicht Abhängig von } u$$

sonst werden sich andere Frequenzen zeigen:

$$\underline{I} = a_0 + a_1 \cdot I_1 + a_2 \cdot I_2^2$$

$$I_i = u_1 \cdot e^{j(\omega_1 t - \phi_1)} + u_2 \cdot e^{j(\omega_2 t - \phi_2)}$$

Teil VII

Relativitätstheorie

31 Lichtgeschwindigkeit c

Die absolute Lichtgeschwindigkeit $c \approx 3 \cdot 10^8 \left[\frac{m}{s} \right]$

32 Galilei-Transformation (GT)

$$\begin{aligned} x' &= x - vt & y' &= y & z' &= z & t' &= t \\ x &= x' + vt & y &= y' & z &= z' & t &= t' \end{aligned}$$

33 Lorentz-Transformation

Einstein's (1905) spezielle Relativitätstheorie basiert auf drei Postulaten:

1. Konstanz und Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit c
2. Der Raum ist homogen und isotrop.
3. Alle Inertialsysteme sind Gleichwertig.

33.1 Hintransformation

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (280)$$

33.2 Rücktransformation

$$\begin{aligned} x' &\leftrightarrow x & y' &\leftrightarrow y & z' &\leftrightarrow z & t' &\leftrightarrow t \\ x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & y &= y' & z &= z' & t &= \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \quad (281)$$

33.3 Notation

$$\beta \equiv \frac{v}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \beta = \frac{\partial x^1}{\partial x^0} \quad \text{für } \beta \rightarrow 1 \quad (282)$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} c \cdot t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (283)$$

33.4 Transformationen, die 2.

Hintransformation:

$$\begin{aligned} x^{0'} &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x^{1'} &= \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x^{2'} &= x^2 \\ x^{3'} &= x^3 \end{aligned}$$

Rücktransformation:

$$\begin{aligned}x^0 &= \gamma(x^{0'} - \beta x^{1'}) \\x^1 &= \gamma(x^{1'} + \beta x^{0'}) \\x^2 &= x^{2'} \\x^3 &= x^{3'}\end{aligned}$$

mit

\underline{x} : Ereignis, Ereignispunkt

34 Geschwindigkeitsaddition

34.1 Longitudinal

$$v_1' = \frac{v_1 - v}{1 - \frac{v_1 v}{c^2}} \quad v_1 = \frac{v_1' + v}{1 + \frac{v_1' v}{c^2}} \quad (284)$$

34.2 Allgemein

(auch transversal)

$$v_1 = \frac{v_1' + v}{1 + \frac{v_1 v_1'}{c^2}} \quad v_2 = v_2' \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v_1 v_1'}{c^2}} \quad (285)$$

Transversalfal: $v_1' = 0$

$$\Rightarrow \quad v_1 = v \quad v_2 = v_2' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

35 Dopplereffekt

35.1 Longitudinal

Sich nähernd:

$$v = v' \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \quad \Delta t = \Delta t' \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (286)$$

Sich entfernend:

$$v = v' \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad \Delta t = \Delta t' \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \quad (287)$$

35.2 Transversal

$$v = v' \sqrt{1 - \beta^2} \quad (\text{für hin und zurück}) \quad \Delta t = \gamma \cdot \Delta t' \quad (288)$$

36 Längenkontraktion

$$l = l' \sqrt{1 - \beta^2} \quad (289)$$

Die vorbeifliegende Rakete scheint verkürzt: $l < l' = l_{\text{Ruhe}} = \text{Eigenlänge}$

37 Zeitdilatation

$$T = t_2 - t_1 = \delta_t \cdot t = \gamma(t_2' - t_1') = \gamma \cdot T' \quad \text{mit } T > T' = \text{Eigenzeit} \quad (290)$$

38 μ -Meson

Kosmische Strahlung in der Höhe $10..20km$ generieren μ -Mesonen, welche auf der Oberfläche beobachtet wurden.
Eigenlebensdauer: $2.2 \cdot 10^{-6}$ [s]