

Formelsammlung - Mathematik - Lineare Algebra

Mario Konrad
Mario.Konrad@gmx.net

26. Oktober 2003

Inhaltsverzeichnis

1	Vektoren	2
1.1	Vektor $\vec{v}$	2
1.2	Gerade	2
1.3	Ebene	2
1.4	Koordinatengleichung der Ebene	3
1.5	Skalarprodukt	3
1.6	Vektorprodukt	3
1.7	Spatprodukt	3
1.8	Cachy-Schwarz-Ungleichung	3
1.9	Gleichung der Ebene: Hesse'sche Normalform	3
1.10	Projektion eines Vektors auf einen andern	4
1.11	Linearkombination	4
1.12	Lineare Abhängigkeit	4
2	Matrizen	4
2.1	Basis eines Vektorraumes	4
2.2	Gleichungssysteme	4
2.3	Determinanten	5
2.4	Cramer'sche Regel	6
2.5	Allgemeines	6
2.6	Matrixmultiplikation	7
2.7	Inverse oder Kehrmatrix	7
2.8	Rang einer Matrix	8
2.9	Vektorräume	8
2.10	LU-Zerlegung einer Matrix	9
3	Kegelschnitte in achsenparalleler Lage	9
3.1	Ellipse in der Ebene	10
3.2	Hyperbel in der Ebene	10
3.3	Parabel in achsenparalleler Lage	11
4	Lineare Abbildungen	12
4.1	Abbildung als Matrix	12
4.2	Lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$	12
4.3	Zusammengesetzte Abbildungen	13
4.4	Allgemeine Eigenschaften	13
4.5	Bild eines Gitters	13
4.6	Spezielle Abbildungen	13
4.7	Längentreue Abbildungen	13
4.8	Spiegelung an beliebiger Ebene durch 0	13
4.9	Drehung um eine beliebige Achse mit Winkel ω	13
4.10	Drehungen	14
4.11	Perspektive Affinität	14
5	Eigenwerte, Eigenvektoren	14

6	Koordinatentransformationen	15
7	Übergang von orthogonalen Koordinatensystemen	15
7.1	Inverse Transformation	16
8	Eulersche Winkel	16
9	Hauptachsentheorem	16
9.1	Kegelschnitte in allgemeiner Lage	17
10	Kleinste Quadrate	18
10.1	Matrizenschreibweise des linearen Modells	18
10.2	Fehlgleichung	18
10.3	Spezialfall: Parameter einer Ausgleichsgeraden	18
10.4	Normalgleichungssystem	18
10.5	Formale bestimmung der Parameter	19
11	Simplex-Algorithmus	19
11.1	Idee	19
11.2	Beispiel	19
11.3	Zusammenfassung	21
12	Normen	21
12.1	Normen von Vektoren	21
12.2	Normen von Matrizen	22
13	Konvergenz	22
13.1	Konvergenz einer Vektorfolge	22
13.2	Konvergenz einer Matrixfolge	22
14	Konditionszahl einer Matrix	23

Vektoren

1.1 Vektor $\vec{v}$

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \quad (1)$$

Algebraische Eigenschaften

$$\text{Kommutativität: } \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (2)$$

$$\text{Assoziativität: } (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad (3)$$

$$\text{Existenz eines neutralen Elements: } \vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \quad \forall \vec{a} \quad (4)$$

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0} \quad (5)$$

$$(6)$$

Multiplikation mit einem Skalar

$$(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a} \quad (7)$$

$$\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b} \quad (8)$$

$$(\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) \quad (9)$$

Einheitsvektor

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \quad \text{Vektor mit Länge 1} \quad (10)$$

Zerlegung eines Vektors:

$$\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

wobei:

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad \beta = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad (13)$$

1.2 Gerade

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$\Rightarrow \vec{p} = \vec{p}_0 + \lambda \vec{r} \quad (17)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \quad (18)$$

1.3 Ebene

$$\vec{p} = \vec{p}_0 + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \quad (19)$$

Wobei $\vec{p}$ der Ortsvektor des laufenden Punktes ist.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (20)$$

1.4 Koordinatengleichung der Ebene

$$Ax + By + Cz = D \quad (21)$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} A & B & C \end{pmatrix} \quad \text{Normalenvektor auf die Ebene} \quad (22)$$

$$D = \vec{n} \circ \vec{p} \quad \vec{p}: \text{Punkt der Ebene} \quad (23)$$

1.5 Skalarprodukt

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \omega \quad (24)$$

$$\underline{a}' \cdot \underline{b} = \sum_{i=1} a_i \cdot b_i \quad (25)$$

$$\vec{a} \circ \vec{a} = \|\vec{a}\|^2 \quad (26)$$

$$\text{wenn } \omega = k \frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \circ \vec{b} = 0 \quad (27)$$

$$0 < \omega < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{a} \circ \vec{b} > 0 \quad (28)$$

$$\frac{\pi}{2} < \omega < \pi \Rightarrow \vec{a} \circ \vec{b} < 0 \quad (29)$$

$$\text{Kommutativität: } \vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a} \quad (30)$$

$$\text{Distributivität: } \vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c} \quad (31)$$

$$\text{KEINE Assoziativität} \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} \circ \vec{c}) \neq (\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c} \quad (32)$$

1.6 Vektorprodukt

$$\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b} \quad \vec{v} \text{ steht senkrecht auf } \vec{a} \text{ und } \vec{b} \quad (33)$$

$$\|\vec{v}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin \alpha \quad (34)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{a} = 0 \quad (35)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{b} = 0 \quad (36)$$

$$\text{KEINE Kommutativität} \quad \vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \quad (37)$$

$$\text{KEINE Assoziativität} \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \quad (38)$$

$$\text{Distributivität} \quad (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \quad (39)$$

1.7 Spatprodukt

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \quad (40)$$

$$\text{Distributivität} \quad [a_1' + a_2', \vec{b}, \vec{c}] = [a_1', \vec{b}, \vec{c}] + [a_2', \vec{b}, \vec{c}] \quad (41)$$

$$[\alpha \vec{a}, \beta \vec{b}, \gamma \vec{c}] = \alpha \beta \gamma [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \quad (42)$$

1.8 Cagy-Schwarz-Ungleichung

$$|\vec{a} \circ \vec{b}| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \quad (43)$$

1.9 Gleichung der Ebene: Hesse'sche Normalform

$$\frac{ax + by + cz - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0 \quad (44)$$

Der Abstand eines Punktes P von einer Ebene E wird erhalten, indem die Koordinaten des laufenden Punktes der Ebene in der Hesse'schen Normalform durch die Koordinaten von P ersetzt werden:

$$\frac{\underline{n}'(\underline{p} - \underline{p}_0)}{\|\underline{n}\|} = \text{Abstand mit Vorzeichen} \quad (45)$$

1.10 Projektion eines Vektors auf einen anderen

$$\vec{a}_b = \frac{(\vec{a} \circ \vec{b})}{\|\vec{b}\|^2} \cdot \vec{b} \quad (46)$$

1.11 Linearkombination

$$\vec{v} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} \quad (47)$$

$$\alpha = \frac{[\vec{v}, \vec{b}, \vec{c}]}{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]} \quad (48)$$

$$\alpha = \frac{[\vec{a}, \vec{v}, \vec{c}]}{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]} \quad (49)$$

$$\alpha = \frac{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}]}{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]} \quad (50)$$

$$(51)$$

1.12 Lineare Abhängigkeit

Lineare Abhängigkeit: Vektor kann als Linearkombination anderer Vektoren dargestellt werden.

Lineare Unabhängigkeit: Vektoren $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ sind linear unabhängig, wenn der Nullvektor **nur** die triviale Darstellung zulässt, d.h. wenn aus

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n \\ \alpha_1 &= \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0 \end{aligned}$$

folgt.

2 Matrizen

2.1 Basis eines Vektorraumes

Vektoren $\{\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n\}$ bilden eine Basis für einen Vektorraum, wenn:

- $\{\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n\}$ linear unabhängig sind.
- $\{\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n\}$ den gesamten Raum aufspannen.

2.2 Gleichungssysteme

Lineare Gleichung mit einer unbekannten. Form: $a \cdot x = b$. Drei mögliche Fälle:

1. $a \neq 0 \implies$ genau eine Lösung.
2. $a = 0$ und $b \neq 0 \implies$ keine Lösung.
3. $a = 0$ und $b = 0 \implies$ unendlich viele Lösungen (jede Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist Lösung).

Lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten. Form:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

wobei a_{ik} und b_i bekannt sind. Dies kann als Koordinatenpaar des Schnittpunktes interpretiert werden:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Keine Lösung falls Determinante 0 gibt:

$$a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} = 0$$

Ein lineares Gleichungssystem heisst **homogen** wenn $\underline{b} = \underline{0}$ ist.

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b} = \underline{0}$$

- homogenes, lineares Gleichungssystem hat minimum eine Lösung (die Triviale)
- homogenes, lineares Gleichungssystem hat nur die triviale Lösung wenn
 - A ist regulär (A^{-1} existiert)
 - Austauschverfahren bricht nicht vorzeitig ab
 - Zeilen-/Spaltenvektoren sind linear unabhängig
- $\underline{x}^{(1)}, \underline{x}^{(2)}$ sind Lösungen des homogenen, linearen Gleichungssystems $A\underline{x} = \underline{0}$, dann ist auch jede Linearkombination von $\underline{x}^{(1)}$ und $\underline{x}^{(2)}$ Lösung des Systems.

Die Lösungsmenge des Systems $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ ist ein Vektorraum der Dimension $n - r$ wobei $r = \text{Rang}(A)$

Ein lineares Gleichungssystem heisst **inhomogen** wenn $\underline{b} \neq \underline{0}$

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b} \neq \underline{0}$$

- inhomogenes, lineares Gleichungssystem $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ ist genau dann eindeutig lösbar, wenn
 - A ist regulär, d.h. $\det A \neq 0, \exists A^{-1}$
 - Austauschverfahren bricht nicht vorzeitig ab
 - $\underline{b}$ lässt sich genau auf eine Art als Linearkombination der Spalten von A darstellen.

2.3 Determinanten

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (52)$$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \quad (53)$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} \quad (54)$$

Determinante ist rekursiv definiert:

$$\det B = b_{11} \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} - b_{12} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} + b_{13} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} \quad (55)$$

$$\det B = \sum_{j=1}^3 (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot UD_{1j} \quad (56)$$

Allgemein:

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot UD_{1j} \det A = \det AA^T \quad (57)$$

- Werden in einer Determinanten zwei Zeilen (Spalten) vertauscht, so ändert sich das Vorzeichen.
- Wenn in einer Determinanten sämtliche Elemente einer Zeile (Spalte) 0 sind, so ist die Determinante gleich 0.
- Wenn in einer Determinanten zwei Zeilen (Spalten) gleich sind, dann hat die Determinante einen Wert von 0.
- Multipliziert man alle Elemente mit einer Zahl λ , so ist der Wert der Determinante gleich dem λ -fachen.

Dreiecksformen:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \quad (58)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \quad (59)$$

2.4 Cramer'sche Regel

Gleichungssystem (regulär):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (61)$$

regulär $\Rightarrow D \neq 0$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (62)$$

$$\text{falls } D \neq 0 \Rightarrow x_1 \cdot D = D_1 \Rightarrow x_1 = \frac{D_1}{D} \quad (63)$$

Bemerkung: die formale Lösung ist nicht anzuwenden für grössere Gleichungssysteme.

2.5 Allgemeines

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$A_{1 \times n} = [a_1 \quad \cdots \quad a_n] \quad (65)$$

$$A_{n \times 1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (66)$$

mit

$$a_{ij} \in \mathbb{C}$$

$$a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Transponierte Matrix:

$$A_{m \times n} \Rightarrow A'_{n \times m} = A^T_{n \times m} \quad (67)$$

Spalten und Zeilen werden vertauscht.

Addition

$$A_{m \times n} + B_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (68)$$

$$s_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (69)$$

Differenz

$$s_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \quad (70)$$

Algebraische Eigenschaften

$$\text{Kommutativität: } A + B = B + A \quad (71)$$

$$\text{Assoziativität: } (A + B) + C = A + (B + C) \quad (72)$$

$$\text{neutrales Element: } A + 0 = A \quad \forall A \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (73)$$

$$\forall A \quad \exists \tilde{A} \quad \text{mit } A + \tilde{A} = 0 \quad \implies \quad \tilde{a}_{ij} = -a_{ij} \quad (74)$$

Multiplikation mit Skalar

$$\underset{n \times m}{A} \cdot \underset{m \times 1}{x} = \underset{n \times 1}{b} \quad (75)$$

$$b_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot x_j \quad (76)$$

Lineare Abbildungen

$$\sqrt{\frac{3}{2}}x_1 - \frac{1}{2}x_2 = y_1 \quad (77)$$

$$\frac{1}{2}x_1 - \sqrt{\frac{3}{2}}x_2 = y_2 \quad (78)$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (79)$$

2.6 Matrixmultiplikation

$$\underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times k}{B} = \underset{m \times k}{C} \quad (80)$$

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^m a_{il} \cdot b_{lj} \quad (81)$$

Rechenregeln:

$$\text{Assoziativität: } (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \quad (82)$$

$$\text{Distributivität von links: } B \cdot (C + D) = B \cdot C + B \cdot D \quad (83)$$

$$\text{Distributivität von rechts: } (C + D) \cdot E = C \cdot E + D \cdot E \quad (84)$$

$$\text{KEINE Kommutativität: } A \cdot B \neq B \cdot A \quad (85)$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \quad (86)$$

$$\det A \cdot B = \det A \cdot \det B \quad (87)$$

2.7 Inverse oder Kehrmatrix

Nur reguläre ($\det A \neq 0$) Matrizen haben eine Inverse.

$$A^{-1} \cdot A = I = A \cdot A^{-1} \quad (88)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{gilt nur für 2x2 Matrizen} \quad (89)$$

Eigenschaften:

$$1. \quad A^{-1} \cdot A = I = A \cdot A^{-1}$$

2. Die Inverse zu A ist **eindeutig**.

$$3. \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

$$4. (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

$$5. A \text{ und } B \text{ seien reguläre Matrizen: } (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Austauschverfahren zu Berechnung von A^{-1} :

y_1	x_1	x_2
	a_{11}	a_{12}
y_2	a_{21}	a_{22}

Rechenregeln:

1. Das Pivot geht in reziproken Wert über:

$$a_{11}^* = \frac{1}{a_{11}} \quad \text{mit } a_{11} \neq 0$$

2. Die Elemente in der Pivot-Spalte sind durch das Pivot zu dividieren:

$$a_{21}^* = \frac{a_{21}}{a_{11}}$$

3. Die Elemente in der Pivot-Zeile sind durch das Pivot zu dividieren und das Vorzeichen ist zu wechseln:

$$a_{12}^* = -\frac{a_{12}}{a_{11}}$$

4. Restliche Elemente werden berechnet, indem man das Produkt aus dem Element der Pivot-Spalte und dem neuen Element in der Pivot-Zeile addiert:

$$\begin{aligned} a_{22}^* &= a_{22} + a_{21} \cdot a_{12}^* \\ &= a_{22} + a_{21} \cdot \left(-\frac{a_{12}}{a_{11}}\right) \\ &= a_{22} - a_{21} \cdot \frac{a_{12}}{a_{11}} \end{aligned}$$

Bemerkung: es ist verboten ein Pivot zu wählen, welches 0 ist.

2.8 Rang einer Matrix

Der Rang einer Matrix A ist gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilen- oder Spaltenvektoren.

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} A \\ n \times m \end{pmatrix} \leq \min(n, m) \quad (90)$$

Der Rang einer Matrix A ist gleich der Ordnung der grössten von Null verschiedenen Unterdeterminanten von A .

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} A \cdot B \\ n \times m \quad m \times k \end{pmatrix} \leq \min(\text{Rang}(A), \text{Rang}(B)) \quad (91)$$

$$\text{Rang}(A) \leq \min(n, m) \quad (92)$$

$$\text{Rang}(B) \leq \min(m, k) \quad (93)$$

$$\text{Rang}(A \cdot B) \leq \min(n, k) \quad (94)$$

2.9 Vektorräume

Ein Tripel $(V, \oplus, \odot)$ bestehend aus einer Menge V und zwei Operatoren $\oplus, \odot$ heisst Vektorraum, falls V abgeschlossen gegenüber den Operatoren $\oplus, \odot$ und falls sie folgende Axiome erfüllen (8):

1. Assoziativität von $\oplus$

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z) \quad \forall x, y, z \in V \quad (95)$$

2. Kommutativität von $\oplus$

$$x \oplus y = y \oplus x \quad \forall x, y \in V \quad (96)$$

3. Existenz des neutralen Elements für $\oplus$

$$\exists e \in V \quad \text{so dass} \quad e \oplus x = x \quad \forall x \in V \quad (97)$$

4. Existenz des inversen Elements für $\oplus$

$$\forall x \in V \quad \exists \tilde{x} \in V \quad \text{mit} \quad x \oplus \tilde{x} = e \quad \forall x, \tilde{x} \in V \quad (98)$$

5. Multiplikation mit Skalar

$$\lambda \odot (\mu \odot x) = (\lambda \cdot \mu) \odot x \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \forall x \in V \quad (99)$$

6. Existenz des neutralen Elements für $\odot$

$$1 \odot x = x \quad \forall x \in V \quad (100)$$

7. Distributivität für $\odot$

$$\lambda \odot (x \oplus y) = (\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y) \quad \forall x, y \in V \quad (101)$$

8. Distributivität

$$(\lambda + \mu) \odot x = (\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x) \quad \forall x \in V \quad (102)$$

2.10 LU-Zerlegung einer Matrix

$$A = L \cdot U \quad (103)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ a_{21} & 1 & 0 & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (104)$$

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b} \quad \underline{x} \text{ unbekannt, } \underline{b} \text{ bekannt} \quad (105)$$

$$L \cdot U \cdot \underline{z} = \underline{b} \quad (106)$$

$$L \cdot \underline{z} = \underline{b} \quad \text{mit} \quad \underline{z} = U \cdot \underline{x} \quad (107)$$

Das System wird für $\underline{z}$ gelöst. Wenn dann $\underline{z}$ bekannt ist, wird das System $U\underline{x} = \underline{z}$ für $\underline{x}$ gelöst.

Die k-ten Zeile von U enthält die Elemente der Pivot-Zeile des k-ten Austauschschrittes.

Die k-ten Spalte von L enthält unterhalb der Diagonalen die Elemente der Pivot-Spalte des k-ten Austauschschrittes. Die Diagonale von L enthält 1.

3 Kegelschnitte in achsenparalleler Lage

$$A \cdot x_1^2 + C \cdot x_2^2 + 2 \cdot D \cdot x_1 + 2 \cdot E \cdot x_2 + F = 0 \quad (108)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 & D \\ 0 & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (109)$$

$$\underline{x}' \cdot \Delta \cdot \underline{x} = 0 \quad (110)$$

$$\text{spur}(\Delta) = A + C + F \hat{=} \sum \text{Diagonalelemente} \quad (111)$$

Kreis:

$$\begin{aligned} M &= (m_1, m_2) && \text{Mittelpunkt} \\ P &= (x_1, x_2) && \text{beliebiger Punkt auf Kreis} \\ R &= M - P && \text{Abstand zwischen M und P} \end{aligned}$$

$$R^2 = (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 \quad (112)$$

$$R^2 = x_1^2 - 2 \cdot m_1 \cdot x_1 + m_1^2 + x_2^2 - 2 \cdot m_2 \cdot x_2 + m_2^2 \quad (113)$$

$$A \cdot x_1^2 + C \cdot x_2^2 + 2 \cdot D \cdot x_1 + 2 \cdot E \cdot x_2 + F = 0 \quad (114)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 & D \\ 0 & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (115)$$

Bedingungen für Kreisharakter:

- $\det \rho = A^2 > 0$
- $\text{koeff}(x_1^2) = \text{koeff}(x_2^2)$
- keine gemischte Terme der Form $x_1 \cdot x_2$

Tangente an Kreis:

$$(x_1 - m_1)(p_1 - m_1) + (x_2 - m_2)(p_2 - m_2) = R^2 \quad (116)$$

Steigung der Geraden durch M und P:

$$\frac{p_2 - m_2}{p_1 - m_1} \quad (117)$$

Steigung der Tangenten durch P:

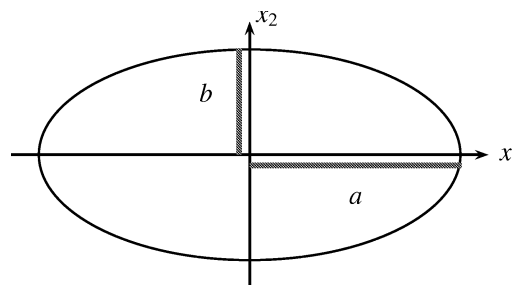
$$-\frac{p_1 - m_1}{p_2 - m_2} \quad (118)$$

Gleichung der Tangente

$$\frac{x_2 - p_2}{x_1 - p_1} = -\frac{p_1 - m_1}{p_2 - m_2} \quad (119)$$

3.1 Ellipse in der Ebene

Definition: Die Ellipse ist der geometrische Ort der Punkte der Ebene, für welche die Summe der Abstände zu zwei festen Punkten F_1, F_2 (Brennpunkte) konstant ist.



$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \quad \text{mit } a, b \text{ als Achsenabschnitte} \quad (120)$$

Parameter-Gleichung:

$$\begin{aligned} x_1 &= m_1 + a \cdot \cos t \\ x_2 &= m_2 + b \cdot \sin t \end{aligned}$$

Gleichung der Tangente durch elliptischen Punkt P:

$$\frac{(x_1 - m_1)(p_1 - m_1)}{a^2} + \frac{(x_2 - m_2)(p_2 - m_2)}{b^2} = 1 \quad (121)$$

3.2 Hyperbel in der Ebene

Definition: Die Hyperbel ist der geometrische Ort der Punkte der Ebene für welche die Differenz der Abstände zu zwei festen Punkten (Brennpunkte), dem Betrag nach konstant ist.

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \quad (122)$$

Brennachse parallel der x_1 -Achse: $+\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$

Brennachse parallel der x_2 -Achse: $-\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$

Hyperbeläste:

$$x_2 = +\frac{b}{a} \sqrt{x_1^2 - a^2}$$

$$x_2 = -\frac{b}{a} \sqrt{x_1^2 - a^2}$$

$$x_2 = +\frac{b}{a} \sqrt{a^2 + x_1^2}$$

$$x_2 = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 + x_1^2}$$

Mögliche Parametergleichung der Hyperbel:

$$\cosh: x \mapsto \frac{\exp^x + \exp^{-x}}{2} \quad (123)$$

$$\sinh: x \mapsto \frac{\exp^x - \exp^{-x}}{2} \quad (124)$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x \equiv 1 \quad (125)$$

$$x_1 = a \cdot \cosh t, x_2 = b \cdot \sinh t$$

$$x_1 = a \cdot \sinh t, x_2 = b \cdot \cosh t$$

$$x_1 = -a \cdot \cosh t, x_2 = b \cdot \sinh t$$

Satz: Jede Hyperbel besitzt ein paar Asymptoten, die sich im Mittelpunkt der Hyperbel schneiden und symmetrisch sind zu den Hyperbelachsen.

$$A \cdot x_1^2 + 2 \cdot B \cdot x_1 \cdot x_2 + C \cdot x_2^2 + 2 \cdot D \cdot x_1 + 2 \cdot E \cdot x_2 + F = 0 \quad (126)$$

3.3 Parabel in achsenparalleler Lage

Definition: Die Parabel ist der geometrische Ort der Punkte, für welche das Verhältnis des Abstandes zu einem festen Punkt F (Brennpunkt) und zu einer festen Geraden d (Leitlinie) gleich ist.

$$x_2^2 = 2 \cdot \exp \cdot x_1 \quad (127)$$

Verschiebung der Parabel parallel zu Achsen:

$$(x_2 - a_2)^2 = 2 \cdot \exp \cdot (x_1 - a_1) \quad (128)$$

$$A \cdot x_2^2 + 2 \cdot D \cdot x_1 + 2 \cdot E \cdot x_2 + F = 0 \quad (129)$$

Allgemeine Form:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & D \\ 0 & A & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (130)$$

$$\det \rho = 0 \quad (131)$$

$$\det \delta = D \cdot (-A \cdot D) \quad (132)$$

Gleichung der Tangente:

$$\frac{x_2 - p_2}{x_1 - p_1} = \frac{\exp}{p_2} \quad (133)$$

$$x_2 = \frac{\exp}{p_2} (x_1 - p_1) + p_2 \quad (134)$$

Schnittpunkt der Tangente mit x_2 -Achse:

$$x_2 = \frac{\exp}{p_2}(x_1 - p_1) + p_2 \quad (135)$$

$$x_1 = 0 \quad (136)$$

$$x_2 = -\frac{\exp \cdot p_1}{p_2} + p_2 \quad (137)$$

$$x_1 = 0 \quad (138)$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{p_2}{2} \quad (139)$$

4 Lineare Abbildungen

Definition: Eine Abbildung ist linear, wenn für alle $\underline{x}, \underline{y} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ folgendes gilt:

$$f(\underline{x} + \underline{y}) = f(\underline{x}) \oplus f(\underline{y}) \quad (140)$$

$$f(\lambda \cdot \underline{x}) = \lambda \odot f(\underline{x}) \quad (141)$$

Definition des Kerns: Der Kern von f ist die Menge der Vektoren $\underline{x} \in V$, die auf den Nullvektor abgebildet werden.

$$\text{Kern} = \{\underline{x} | \underline{x} \in V, f(\underline{x}) = \underline{0}\} \quad (142)$$

$$f(\underline{x}) = A \cdot \underline{x} = \underline{0} \quad (143)$$

Satz: Der Kern der linearen Abbildung $f : V \mapsto W$ ist ein Untervektorraum von V .

Definition: Die Menge der Bildvektoren von V in W heisst Bild von f :

$$\text{Bild}(f) = \{\underline{p} \in W, \underline{p} = f(\underline{x}) \text{ mit } \underline{x} \in V\} \quad (144)$$

Statt Bild auch: $\text{image}(f), f(V)$

Satz: Das Bild von $f(W)$ ist ein Untervektorraum von W .

Definition: Sei f eine lineare Abbildung von V in W . Ist $f(V)$ endlich dimensional, dann heisst die Dimension von $f(V)$ der Rang der Abbildung f .

$$\text{Rang}(f) = \text{Dimension von } f(V) \quad (145)$$

4.1 Abbildung als Matrix

$$V \mapsto W \quad (146)$$

$$f(\underline{x}) = \underline{x}^* \quad (147)$$

$$A \cdot \underline{x} = \underline{x}^* \quad (148)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (149)$$

Die Spaltenvektoren sind die Bilder der Basisvektoren.

4.2 Lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$

Die Elemente der (Kolonnen) Spalten der Abbildungsmatrix sind die Komponenten der Bilder der Grundvektoren.

$$A \cdot \underline{x} = f(\underline{x}) \quad (150)$$

Satz: Eine lineare Abbildung ist dann und nur dann Umkehrbar, wenn diese Abbildungsdeterminante von Null verschieden ist.

Ist A die Matrix der Abbildung f , so ist A^{-1} die Matrix der Abbildung f^{-1} .

Lineare abbildungen mit **positiver** Determinante sind Orientierungserhaltend. Abbildungen mit **negativer** Determinante kehren die Orientierung um.

4.3 Zusammengesetzte Abbildungen

Seien g_1, g_2 lineare Abbildungen. Das Produkt $g_2(g_1(x))$ von linearen Abbildungen ist wieder eine lineare Abbildung, deren Matrix dem Produkt der zugehörigen Matrizen $A_2 \cdot A_1$ in der gleichen Reihenfolge entspricht.

4.4 Allgemeine Eigenschaften

- Das Bild einer Geraden ist wieder eine Gerade.
- Das Bild einer Geraden durch den Nullpunkt ist wieder eine Gerade durch den Nullpunkt.
- Lineare Abbildungen bewahren die parallele Lage von Geraden.

4.5 Bild eines Gitters

Das Verhältnis der Inhalte der schraffierten Flächen ist durch den Betrag der Abbildungsdeterminante gegeben.

$$\det A = \frac{\|\underline{\hat{e}}_1 \times \underline{\hat{e}}_2\|}{\|\underline{e}_1 \times \underline{e}_2\|} \quad (151)$$

Satz: Betragsmässig ist der Wert der Determinante einer Abbildungsmatrix gleich dem Verhältnis zugeordnete Volumen im $\mathbb{R}^n$.

4.6 Spezielle Abbildungen

Abbildungen welche das Skalarprodukt invariant lassen:

$$\underline{x}' \cdot \underline{y} = \underline{\hat{x}}' \cdot \underline{\hat{y}} \quad (152)$$

- Falls f das Skalarprodukt invariant lässt, dann ist f Längentreu.
- Die Beträge der Winkel bleiben erhalten. Winkeltreu bis auf das Vorzeichen.

4.7 Längentreue Abbildungen

$$A^T \cdot A = I \quad (153)$$

A ist orthonormiert, d.h. die Spaltenvektoren sind orthogonal und haben die Länge 1.

Die Längentreuen Abbildungen sind durch orthonormierte Abbildungsmatrizen gekennzeichnet.

$$A^T \cdot A = I = A \cdot A^T \quad (154)$$

$$\Rightarrow \det A = +1 \quad \text{oder} \quad -1 \quad (155)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = A^T \quad (156)$$

4.8 Spiegelung an beliebiger Ebene durch 0

$$f: \underline{x} \mapsto \underline{x} - 2 \cdot (\underline{x}' \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n} \quad (157)$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 - 2n_1^2 & -2n_1n_2 & -2n_1n_3 \\ -2n_1n_2 & 1 - 2n_2^2 & -2n_2n_3 \\ -2n_1n_3 & -2n_2n_3 & 1 - 2n_3^2 \end{pmatrix} \quad (158)$$

4.9 Drehung um eine beliebige Achse mit Winkel ω

$$\|\underline{a}\| = \tan \frac{\omega}{2} v^* = \frac{1}{1 + \|\underline{a}\|^2} \cdot \left[(1 - \|\underline{a}\|^2) \cdot \underline{v} + 2 \cdot (\underline{a}' \cdot \underline{v}) \cdot \underline{a} + 2 \cdot (\underline{a} \times \underline{v}) \right] \quad (159)$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{1 + \|\underline{a}\|^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 & 2(a_1 \cdot a_2 - a_3) & 2(a_1 \cdot a_3 - a_2) \\ 2(a_1 \cdot a_2 + a_3) & 1 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 & 2(a_2 \cdot a_3 - a_1) \\ 2(a_1 \cdot a_3 - a_2) & 2(a_2 \cdot a_3 + a_1) & 1 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 \end{pmatrix} \quad (160)$$

4.10 Drehungen

4.10.1 Drehung um die X-Achse im $\mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos & -\sin \\ 0 & \sin & \cos \end{pmatrix} \quad (161)$$

4.10.2 Drehung um die Y-Achse im $\mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} \cos & 0 & \sin \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin & 0 & \cos \end{pmatrix} \quad (162)$$

4.10.3 Drehung um die Z-Achse im $\mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} \cos & -\sin & 0 \\ \sin & \cos & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (163)$$

Satz: Jede orthonormierte Matrix A mit $\det A = 1$ stellt eine Drehung dar. Der Drehwinkel ω ist gegeben durch:

$$\cos \omega = \frac{\text{Spur}(A) - 1}{2} \quad (164)$$

wobei

$$\text{Spur}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad (165)$$

$$\cos \omega = \frac{1 - \|\underline{a}\|^2}{1 + \|\underline{a}\|^2} \quad (166)$$

4.11 Perspektive Affinität

Die Abbildung

$$f : \underline{x} \mapsto \underline{x} - (\underline{x}' \cdot \underline{n}) \cdot \underline{r} \quad (167)$$

ist linear.

5 Eigenwerte, Eigenvektoren

Ein Vektor ($\underline{x} \neq \underline{0}$), welcher bei einer linearen Abbildung f seine Richtung (nichtnotwendigerweise seine Länge) beibehält, heisst Eigenvektor von f .

Sie sind durch folgende Gleichung gekennzeichnet:

$$f(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x} \quad \text{mit } \underline{x} \neq \underline{0} \quad (168)$$

Ist A die Abbildungsmatrix. $\underline{x}$ ist Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ , wenn folgendes gilt:

$$\underset{n \times n}{A} \cdot \underline{x} = \lambda \cdot \underline{x} \quad \underline{x} \neq \underline{0} \quad (169)$$

$$\left(\underset{n \times n}{A} - \lambda \cdot \underset{n \times n}{I} \right) \cdot \underline{x} = \underline{0} \quad (170)$$

Satz:

1. Jede $n \times n$ reelle **symmetrische** Matrix A hat n reelle Eigenwerte.
2. Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind zueinander orthogonal.
3. Es ist immer möglich Eigenvektoren, welche zu mehrfachen Eigenwerten gehören, so zu wählen, dass sie orthogonal zueinander sind.

Satz: Jede reelle symmetrische Matrix A lässt sich wie folgt zerlegen:

$$A = \Gamma \Lambda \Gamma^{-1} \quad (171)$$

mit Γ orthonormiert (d.h.: $\Gamma^{-1} = \Gamma^T$) und Λ diagonal.

Γ ist die Matrix der orthonormierten Eigenvektoren von A . Λ ist die Matrix der Eigenwerte von A .

$\underline{g}^{(i)}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert λ_i .

$$A \cdot \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{g}^{(1)} & \underline{g}^{(2)} & \dots & \underline{g}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{g}^{(1)} & \underline{g}^{(2)} & \dots & \underline{g}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (172)$$

$$\Rightarrow A = \Gamma \cdot \Lambda \cdot \Gamma^{-1} \quad (173)$$

Bei orthogonalen Transformationen bleiben Spur und Determinante von quadratischen Matrizen invariant.

Bei orthogonalen Transformationen mit Transformationsmatrix S geht eine Matrix A in die Matrix $S \cdot A \cdot S^T$ über.

$$\text{Spur}(S \cdot A \cdot S^T) = \text{Spur}(A) \quad (174)$$

$$\det S \cdot A \cdot S^T = \det A \quad (175)$$

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \quad \text{Transformationsmatrix} \quad (176)$$

$$S^{-1} = \frac{1}{\det S} \begin{pmatrix} s_{22} & -s_{12} \\ -s_{21} & s_{11} \end{pmatrix} \quad (177)$$

$$\vec{E}_j = \sum_{i=1}^2 s_{ji} \cdot \vec{e}_j \quad (178)$$

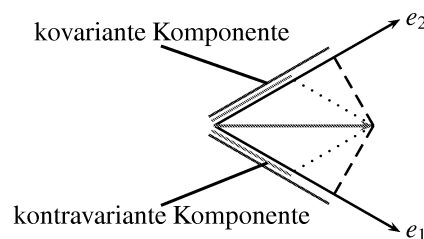
$$\underline{x} = S^T \cdot \underline{X} \quad (179)$$

$$\underline{X} = (S^{-1})^T \cdot \underline{x} \quad (180)$$

Die Komponenten transformieren sich **nicht** wie die Grundvektoren. Sie heissen **kontravariante** Komponenten.

6 Koordinatentransformationen

Die **kovarianten** Komponenten transformieren sich wie die Grundvektoren.



7 Übergang von orthogonalen Koordinatensystemen

Der Übergang zwischen zwei cartesischen Koordinatensystemen mit dem gleichem Ursprung ist durch eine orthonormierte Transformationsmatrix gekennzeichnet.

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \quad (181)$$

$$s_{ij} = \vec{E}_i \odot \vec{e}_j \quad (182)$$

Die Determinante einer orthogonalen Koordinatentransformation hat immer den Wert ± 1 , +1 wenn die Orientierung der beiden Systeme gleich sind, sonst -1 .

$$\det S = \pm 1 \quad (183)$$

7.1 Inverse Transformation

$$S^{-1} = S^T \quad S \text{ ist orthogonal} \quad (184)$$

Eine quadratische Matrix, welche nach Zeilen orthogonal ist, ist von selbst nach Spalten orthogonal.

$$\underline{X} = S \cdot \underline{x} \quad (185)$$

$$\underline{X} = (S^{-1})^T \cdot \underline{x} \quad (186)$$

Bei einer orthogonalen Koordinatentransformation sind die neuen Vektorkomponenten bzw. Punktkoordinaten Linearformen der alten (homogene lineare Funktion), wobei die Matrix der Koeffizienten mit der Transformationsmatrix S übereinstimmen.

8 Eulersche Winkel

Die relative Lage von zwei cartesischen Koordinatensystemen mit dem gleichen Ursprung lässt sich mit Hilfe von 3 Drehwinkeln vollständig beschreiben.

ψ Winkel zwischen $\vec{e}_1$ und der Schnittgerade s der $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ - Ebene mit der $\vec{E}_1 - \vec{E}_2$ - Ebene.

ϕ Winkel zwischen s und $\vec{E}_1$

θ Winkel zwischen $\vec{e}_3$ und $\vec{E}_3$

Satz von Euler: Die allgemeine Auslenkung eines starren Körpers von dem ein Punkt festgehalten wird, ist eine Drehung um eine Achse um diesen Punkt.

9 Hauptachsentheorem

Quadratische Form in zwei Variablen:

$$Q_{(x_1, x_2)} = a_{11} \cdot x_1^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + a_{22} \cdot x_2^2 \quad (187)$$

$$\underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{symmetrisch!} \quad (188)$$

$$A \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \\ a_{12} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \end{pmatrix} \quad (189)$$

Eine Gleichung der Form $Q_{(x)} = C$ mit C fest, ist eine Gleichung eines Kegelschnittes mit Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems, falls der Mittelpunkt existiert.

Ein cartesisches Koordinatensystem in welchem eine quadratische Form Q kein gemischtes Glied aufweist wird als Hauptachsensystem bezeichnet.

Bezüglich diesem System hat die quadratische Form folgende Gestalt:

$$\lambda_1 \cdot x_1^2 + \lambda_2 \cdot x_2^2 \quad (190)$$

Der Kegelschnitt mit der Gleichung

$$a_{11} \cdot x_1^2 + a_{22} \cdot x_2^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 \quad (191)$$

kann aufgrund der Eigenwerte der Koeffizienzmatrix klassifiziert werden.

$$\delta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \tan 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \quad (192)$$

$\alpha \hat{=}$ Drehwinkel der Transformationsmatrix $\Rightarrow$ Hauptachsen

$$\det \delta > 0 \Rightarrow \text{Ellipse} \quad (193)$$

$$\det \delta = 0 \Rightarrow \text{Parabel} \quad (194)$$

$$\det \delta < 0 \Rightarrow \text{Hyperbel} \quad (195)$$

9.1 Kegelschnitte in allgemeiner Lage

Der geometrische Ort aller Punkte deren Koordinaten bezüglich eines bestimmten Koordinatensystems folgende Gleichung zweiten Grades erfüllen, wird Kurve zweiter Ordnung genannt.

$$a_{11} \cdot x_1^2 + 2 \cdot a_{22} \cdot x_1 \cdot x_2 + a_{22} \cdot x_2^2 + 2 \cdot b_1 \cdot x_1 + 2 \cdot b_2 \cdot x_2 + C = 0 \quad (196)$$

Matrizenscheibweise: $\underline{x}^T \cdot \Delta \underline{x} = 0$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (197)$$

mit $a_{12} = a_{21}$ und Δ ist symmetrisch.

Ist die Gleichung einer Kurve 2. Ordnung mit dem Ursprung $O = (0, 0)$ frei von linearen Gliedern, so ist der Punkt O ein Mittelpunkt der Kurve. Ist ein Mittelpunkt vorhanden, dann gibt es zu jedem Punkt (x_1, x_2) einen symmetrischen Punkt $(-x_1, -x_2)$ auf der Kurve. Die Koordinaten (m_1, m_2) des Mittelpunkts einer Kurve 2. Ordnung $F(x_1, x_2) + C = 0$ sind die Lösungen des Systems:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0 \quad a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + b_1 = 0 \quad (198)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0 \quad a_{12} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + b_2 = 0 \quad (199)$$

Die Kurve besitzt also nur dann einen Mittelpunkt, wenn das obige Gleichungssystem lösbar ist, d.h.

$$\det \delta \neq 0 \quad \text{mit} \quad \delta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (200)$$

Der Typ der Kurve kann mit Hilfe von δ bezogen auf das ursprüngliche System bestimmt werden. Insbesondere die Lage der Kurve (Eigenvektoren von δ) und die Längen der Halbachsen.

$$c \rightsquigarrow \tilde{c} = \frac{\det \Delta}{\det \delta} \quad (201)$$

$$\tilde{c} = F(m_1, m_2) + C \quad (202)$$

$$\tilde{c} = \frac{1}{2} L(m_1, m_2) + C \quad (203)$$

mit $L(m_1, m_2) = 2 \cdot b_1 \cdot m_1 + 2 \cdot b_2 \cdot m_2$ (lineare Form).

$$(x_1, x_2) \rightsquigarrow (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \quad \det \Delta \text{ und } \det \delta \text{ bleiben invariant} \quad (204)$$

$$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \rightsquigarrow (x_1, x_2) \quad \det \delta, \tilde{c} \text{ und } \det \Delta \text{ bleiben invariant} \quad (205)$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & C \end{pmatrix} \quad (206)$$

$$\delta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (207)$$

$$\sigma = \text{Spur}(\delta) \quad (208)$$

	$\det \Delta \neq 0$		$\det \Delta = 0$
$\det \delta > 0$	$\sigma \cdot \det \Delta < 0$	reelle Ellipse	2 imaginäre Geraden oder 1 Punkt
	$\sigma \cdot \det \Delta > 0$	imaginäre Ellipse	
$\det \delta < 0$	Hyperbel		ein Paar sich schneidende Geraden
$\det \delta = 0$	Parabel		ein Paar parallele Geraden reell oder imaginär

10 Kleinste Quadrate

Modell: $y_i = a_0 + a_1 \cdot x_i + r_i$

linear in den Parametern a_0, a_1

Messdaten: (x_i, y_i) mit x_i Fehlerfrei und y_i mit zufälligem Fehler. Fehler, Residuum: r_i

$$\sum_{i=1}^n r_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (a_0 + a_1 \cdot x_i)]^2 \quad (209)$$

Beispiele von Modellen:

$$y_i = a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot x_i^2 + r_i \quad (210)$$

$$y_i = a_1 + a_2 \cdot \exp^{-x_i} + r_i \quad (211)$$

$$\implies \ln x_i = \ln a_i - x_i \cdot a_2 + \ln r_i \quad (212)$$

$$\implies z_i = b_1 - x_i \cdot b_2 + \tilde{r}_i \quad \text{Substituiert} \quad = a_1 \cdot \sin x_i + r_i \quad (213)$$

10.1 Matrizenschreibweise des linearen Modells

$$\underline{y} = X \cdot \underline{a} + \underline{r} \quad (214)$$

mit $\underline{y}$ Vektor der Messwerte (bekannt)
 $\underline{X}$ Designmatrix (bekannt)
 $\underline{a}$ Vektor der Parameter (unbekannt)
 $\underline{r}$ Vektor der Residuen (unbekannt)

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \quad (215)$$

$$\|\underline{y} - X\underline{a}\|^2 = \|\underline{y}\|^2 + \underline{a}^T X^T X \underline{a} - 2 \cdot \underline{y}^T X \underline{a} \quad (216)$$

10.2 Fehlergleichung

$$y_i = a_0 + a_1 \cdot x_i + r_i \quad (217)$$

$$\underline{y} = X \cdot \underline{a} + \underline{r} \quad (218)$$

10.3 Spezialfall: Parameter einer Ausgleichsgeraden

Modell: $y_i = a_0 + a_1 \cdot x_i + r_i$

$$n \cdot a_0 + a_1 \sum x_i = \sum y_i \quad (219)$$

$$a_0 \cdot \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 = \sum x_i \cdot y_i \quad (220)$$

Normalengleichungssystem

$$\hat{a}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \bar{y} \\ n\bar{x} & \sum x_i \cdot y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \bar{x} \\ n\bar{x} & \sum x_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{\sum x_i y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2} \quad (221)$$

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \quad (222)$$

Die erste Variante ist numerisch sehr schlecht. Besser ist die zweite Variante. Obige Formeln sind analog für a_0 anzuwenden.

10.4 Normalengleichungssystem

Matrizenschreibweise:

$$(X^T X) \underline{a} = X^T \underline{y} \quad (223)$$

Formale Lösung, numerisch **sehr** schlecht, funktioniert aber für alle linearen Modelle!

$$\hat{\underline{a}} = (X^T X)^{-1} X^T \underline{y} \quad (224)$$

10.5 Formale bestimmung der Parameter

$$t = \underline{a}^T \underline{y} \quad (225)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \underline{a}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial t}{\partial a_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial t}{\partial a_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \frac{\partial}{\partial \underline{a}} \underline{a}^T \underline{y} = \underline{y} \quad (226)$$

$$Q = \underline{a}^T S \underline{a} \quad (227)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \underline{a}} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \underline{a}} \underline{a}^T S \underline{a} = 2 \cdot S \underline{a} \quad (228)$$

$$\|\underline{r}\|^2 = \|\underline{y} - X\underline{a}\|^2 = \|\underline{y}\|^2 - 2\underline{a}^T X^T \underline{y} + \underline{a}^T S \underline{a} \quad \text{mit} \quad S = X^T X \quad (229)$$

Ableitung von $\|\underline{r}\|^2$ nach $\underline{a}$:

$$\frac{\partial}{\partial \underline{a}} \|\underline{r}\|^2 = \frac{\partial}{\partial \underline{a}} (\|\underline{y}\|^2 - 2\underline{a}^T X^T \underline{y} + \underline{a}^T S \underline{a}) \quad (230)$$

$$\Rightarrow X^T X \underline{a} = X^T \underline{y} \quad (231)$$

11 Simplex-Algorithmus

Eine lineare Ungleichung zerlegt den n-Dimensionalen Raum in zwei Halbräume. In einem Halbraum ist die Gleichung erfüllt, im andern nicht.

Eine lineare Funktion, welche auf einer abgeschlossenen konvexen Menge definiert ist, nimmt ihren Maximalwert und ihr Minimalwert auf dem Rand der Menge an.

11.1 Idee

Von einer bekannten Ecke des zulässigen Gebietes aus, schreitet man auf dem Rande von Ecke zu Ecke jeweils in einer Richtung fort in welcher die Zielfunktion zunimmt.

Jede Ecke des Polygons am Rande des zulässigen Gebietes ist dadurch charakterisiert, dass mindestens zwei der beteiligten Variablen 0 sind, während die übrigen einem nicht negativen Wert haben.

11.2 Beispiel

Lineares Ungleichungssystem:

$$10x_1 + 20x_2 \leq 1100 \quad (232)$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 160 \quad (233)$$

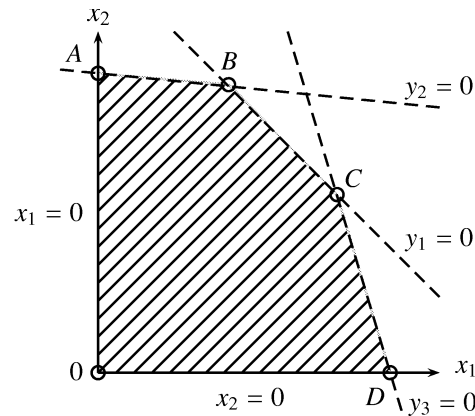
$$x_1 + x_2 \leq 100 \quad (234)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (235)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (236)$$

$$(237)$$

Zielfunktion: $40x_1 + 120x_2$ muss maximiert werden.



Organisation: einführen von Schlupfvariablen

$$y_1 = -110x_1 - 20x_2 + 1100 \quad (238)$$

$$y_2 = -x_1 - 4x_2 + 160 \quad (239)$$

$$y_3 = -x_1 - x_2 + 100 \quad (240)$$

wobei

$$y_i \geq 0 \quad i = 1 \dots 3 \quad (241)$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1 \dots 2 \quad (242)$$

Zielfunktion: $z = 40x_1 + 120x_2$

Schema für Ecke 0 ($x_1 = 0, x_2 = 0$):

	x_1	x_2	1
$y_1 =$	-10	-20	1100
$y_2 =$	-1	-4	160
$y_3 =$	-1	-1	100
$z =$	40	120	0

Schema für Ecke A ($x_1 = 0, y_2 = 0$):

	x_1	y_2	1
$y_1 =$	-5	5	300
$x_2 =$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	40
$y_3 =$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	60
$z =$	10	-30	4800

Der Punkt ist zulässig, denn alle nicht-Basisvariablen sind in diesem Punkt nicht negativ.

Von Schema 0 zu Schema A gelangt man, indem man per Austauschverfahren die Variablen x_2 und y_2 vertauscht. Das Pivot war -4 . usw. ...

Das Optimum ist in Punkt B erreicht, denn alle Elemente der Zielfunktion (ausser ihrem Wert) sind negativ.

Der Weg längs des Randes des Polytops ist wie folgt zu wählen:

	x_1	$\dots$	x_q	$\dots$	x_n	1
$y_1 =$			a_{1q}			b_1
$\vdots$						
$y_i =$			a_{iq}			b_i
$\vdots$						
$y_m =$			a_{mq}			b_m
$z =$	c_1	$\dots$	c_q	$\dots$	c_n	d

1. In der neuen Ecke sollte der Wert d' der Zielfunktion grösser als d werden.

2. Die neue Ecke soll auf dem Rande des zulässigen Gebietes liegen $\implies b'_i \geq 0 \forall i$

$$d' \geq d$$

$$b'_i \geq 0 \forall i \quad \text{insbesondere: } b'_p \geq 0$$

- Die Pivot-Kolonne ist so zu wählen, dass ihr Element c_q in der Zeile der Zielfunktion positiv allenfalls 0 ist.
- In der gewählten Pivotkolonne muss das Element a_{pq} negativ sein. Die Pivot-Zeile ist bestimmt durch den absolut kleinsten Quotienten $\frac{b_i}{|a_{iq}|}$, welche mit dem negativen Elementen a_{iq} der Pivotkolonne gebildet werden.

Das Verfahren kann auf folgende Arten abbrechen:

1. Alle Elemente der Zielfunktion sind negativ. Das gesuchte Optimum wurde erreicht, denn die Zielfunktion kann nicht mehr zunehmen.
2. Es gibt zwar positive Elemente in der Zielfunktionszeile, aber in der dazugehörigen Spalte sind alle Elemente grösser 0, d.h. die Zielfunktion kann beliebig gross gemacht werden.

11.3 Zusammenfassung

Optimum ist erreicht	Alle $b_i \geq 0$ und alle $c_i \leq 0$
Zielfunktion ist unbeschränkt	$\exists k$ mit $c_k > 0$ und alle $a_{ik} \geq 0 \forall i$ in Spalte k
das lineare Programm hat keine Lösung	$\exists i$ mit $b_i < 0$ und $a_{ik} \leq 0 \forall k$ in Zeile i

12 Normen

12.1 Normen von Vektoren

Unter der Norm $\|\underline{x}\|$ eines Vektors $\underline{x}$ versteht man eine reelle Funktion von $\underline{x}$ mit dem folgenden Eigenschaften:

1. $\|\underline{x}\| \geq 0 \quad \|\underline{x}\| = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}$
2. $\|\lambda \underline{x}\| = |\lambda| \cdot \|\underline{x}\| \quad \lambda \text{ ein Skalar}$
3. $\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$ Dreiecksungleichung

12.1.1 Beispiele von Normen

$$\|\underline{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad l_1 - \text{Norm} \quad (243)$$

$$\|\underline{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad l_2 - \text{Norm, euklidische Norm} \quad (244)$$

$$\|\underline{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p} \quad \text{mit } 1 \leq p < \infty \quad l_p - \text{Norm, Hölder-Norm} \quad (245)$$

$$\|\underline{x}\|_\infty = \max_i |x_i| \quad l_\infty - \text{Norm, maximum-Norm} \quad (246)$$

$$(247)$$

Es gilt:

$$\frac{1}{n} \|\underline{x}\|_1 \leq \|\underline{x}\|_\infty \leq \|\underline{x}\|_1 \leq n \cdot \|\underline{x}\|_\infty \quad (248)$$

12.2 Normen von Matrizen

Unter der Norm einer Matrix A versteht man eine Funktion $A \mapsto \|A\|$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\|A\| \geq 0 \quad \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
2. $\|\alpha \cdot A\| = |\alpha| \cdot \|A\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
4. $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

12.2.1 Beispiele von Normen

$$\|A\|_{\infty} = \max_i \sum_k |a_{ik}| \quad \text{Summe der Spalten} \quad (249)$$

$$\|A\|_E = \sqrt{\sum_i \sum_k |a_{ik}|^2} \quad \text{Frobenius} \quad (250)$$

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}| \quad \text{Summe der Zeilen} \quad (251)$$

$$\|A\| = \lambda_{\max}^{\frac{1}{2}} \quad (252)$$

$\lambda_{\max}$ als grösster Eigenwert der Matrix $A^T A$.

13 Konvergenz

13.1 Konvergenz einer Vektorfolge

Eine Vektorfolge $\{\underline{x}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen einen Vektor $\underline{x}$ falls jede Komponente der Folge gegen die entsprechende Komponente von $\underline{x}$ konvergiert.

Damit eine unendliche Vektorfolge gegen $\underline{x}$ konvergiert, ist es notwendig und hinreichend, dass für eine beliebige Vektornorm folgendes gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}\| = 0 \quad (253)$$

13.2 Konvergenz einer Matrixfolge

Eine Matrixfolge $A^{(k)}$ konvergiert gegen eine Matrix A falls jedes einzelne Element der Matrix $A^{(k)}$ konvergiert.

Notwendig und hinreichend für die Konvergenz für eine Matrixfolge $A^{(k)}$ gegen A :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^{(k)} - A\| = 0 \quad (254)$$

In den meisten Konvergenzbetrachtungen werden sowohl Matrizen als auch Vektoren auftreten. Die Norm der Matrizen und Vektoren müssen verträglich sein:

$\ A\ _{\infty}$	ist durch	$\ \underline{x}\ _{\infty}$	induziert
$\ A\ _1$	ist durch	$\ \underline{x}\ _1$	induziert
$\ A\ _2$	ist durch	$\ \underline{x}\ _2$	induziert
$\vdots$		$\vdots$	

$\|A\|_E$ ist von keiner Vektornorm induziert.

Jede Matrixnorm, welche durch eine Vektornorm induziert wird, stellt eine obere Schranke für die Beträge ihrer Eigenwerte.

Sei A eine Matrix.

Sei $\underline{x}$ Eigenvektor von A zu λ .

$$A\underline{x} = \lambda \underline{x} \implies \frac{\|A\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} = |\lambda| \quad (255)$$

$$\max_{\|\underline{x} \neq 0\|} \frac{\|A\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \geq |\lambda| \quad (256)$$

$$\|A\| \geq |\lambda| \quad \forall \lambda \quad (257)$$

$$\|A\| \geq \max |\lambda| \quad (258)$$

14 Konditionszahl einer Matrix

Die Konditionszahl ist ein Mass für die Singularität der Matrix.

Geometrische Definition:

$$\text{sei } M = \max_{\underline{x} \neq 0} \frac{\|A\underline{x}\|_2}{\|\underline{x}\|_2} \quad (259)$$

$$\text{sei } m = \min_{\underline{x} \neq 0} \frac{\|A\underline{x}\|_2}{\|\underline{x}\|_2} \quad (260)$$

$$\kappa = \frac{M}{m} \quad \text{je grösser, je gefährlicher numerisch} \quad (261)$$

Falls A regulär: $\kappa = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2$

$$A = \underset{n \times m}{U} \cdot \underset{n \times m}{\cdot} \cdot \underset{m \times m}{V^T} \quad (262)$$

mit

$$U^T U = I \quad \text{Spalten sind orthonormiert} \quad (263)$$

$$V^T V = I \quad (264)$$

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & s_m \end{pmatrix} \quad \text{mit } s_i \geq 0 \quad (265)$$

$$\kappa = \frac{\max s_i}{\min s_i} = \frac{\lambda_{\max}^{\frac{1}{2}}}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}} \quad (266)$$

wobei

$$1 \leq \kappa \leq \infty \quad (267)$$

Faustregel beim Lösen eines linearen Gleichungssystems $A\underline{x} = \underline{b}$:

Bei einer d -stelligen dezimalen Gleitkommarechnung können die relativen Fehler der Ausgangsdaten von folgender Grössenordnung sein:

$$\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \approx 5 \cdot 10^{-d} \quad (268)$$

Ist die Konditionszahl $\kappa(A) \approx 10^\alpha$, so gilt:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \leq \kappa(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \quad (269)$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|\Delta x\|} \leq \kappa(A) \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \quad (270)$$

Wird ein lineares Gleichungssystem $A\underline{x} = \underline{b}$ mit d -stelligem, dezimalen Float gelöst und die Konditionszahl $\approx 10^\alpha$, so sind Aufgrund der unvermeidlichen Eingangsfehler nur $d - \alpha - 1$ Dezimalstellen in der Lösung $\underline{x}$ sicher.