Formelsammlung

Mario Konrad
Mario.Konrad@gmx.net

26. Oktober 2003

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Mathematik

Kapitel 1

Trigonometrie

1.1 Winkelfunktionen

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	inf

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha \equiv 1 \tag{1.1}$$

Für $\cos\alpha \neq 0$:

$$\tan\alpha \equiv \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \tag{1.2}$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} \equiv 1 + \tan^2\alpha \tag{1.3}$$

1.1.1 Cosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma \tag{1.4}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \tag{1.5}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta \tag{1.6}$$

1.1.2 Sinussatz

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2 \cdot r \tag{1.7}$$

r : Radius des Umkreises

1.2 Inverse Trigonometrische Funktionen

$$\sin\arcsin x = x \tag{1.8}$$
$$\cos\arcsin x = \sqrt{1 - x^2} \tag{1.9}$$
$$\tan\arcsin x = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{1.10}$$
$$\cot\arcsin x = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} \tag{1.11}$$
$$\arctan\tan x = x \tag{1.12}$$
$$\tan\arctan x = x \tag{1.13}$$
$$\sin\arctan x = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \tag{1.14}$$
$$\cos\arctan x = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \tag{1.15}$$
$$\cot\arctan x = \frac{1}{x} \tag{1.16}$$

1.3 Hyperbolische Funktionen

$$\sinh = \frac{1}{2}\left(\exp^{x} - \exp^{-x}\right) \tag{1.17}$$

$$\cosh = \frac{1}{2}\left(\exp^{x} + \exp^{-x}\right) \tag{1.18}$$

$$\tanh = \frac{\sinh x}{\cosh x} \tag{1.19}$$

$$\coth = \frac{\cosh x}{\sinh x} \tag{1.20}$$

$$\sinh t + s = \frac{\exp^{t} \cdot \exp^{s} - \exp^{-t} \cdot \exp^{-s}}{2} = \sinh t \cdot \cosh s + \cosh t \cdot \sinh s \tag{1.21}$$

$$\cosh t + s = \cosh t \cdot \cosh s + \sinh t \cdot \sinh s \tag{1.22}$$

1.4 Area-Funktionen

$$\sinh x \longrightarrow \mathrm{ArSinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \tag{1.23}$$

$$\cosh x \longrightarrow \mathrm{ArCosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \tag{1.24}$$

$$\tanh x \longrightarrow \mathrm{ArTanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) \tag{1.25}$$

$$\coth x \longrightarrow \mathrm{ArCoth}(x) \tag{1.26}$$

Kapitel 2

Lineare Algebra

2.1 Vektoren

2.1.1 Vektor $\vec{v}$

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \tag{2.1}$$

Algebraische Eigenschaften

$$\text{Kommutativität: :} \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \tag{2.2}$$

$$\text{Assoziavitivät:} \quad \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) \tag{2.3}$$

$$\text{Existenz eines neutralen Elements:} \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \qquad \forall \vec{a} \tag{2.4}$$

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0} \tag{2.5}$$

$$\tag{2.6}$$

Multiplikation mit einem Skalar

$$(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a} \tag{2.7}$$

$$\lambda \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b} \tag{2.8}$$

$$(\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) \tag{2.9}$$

Einheitsvektor

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{||\vec{a}||} \qquad \text{Vektor mit Länge 1} \tag{2.10}$$

Zerlegung eines Vektors:

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \tag{2.11}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

wobei:

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad \beta = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \tag{2.13}$$

2.1.2 Gerade

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

$$\vec{p_0} = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{p} = \vec{p_0} + \lambda\vec{r} \tag{2.17}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

2.1.3 Ebene

$$\vec{p} = \vec{p_0} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \tag{2.19}$$

Wobei $\vec{p}$ der Ortsvektor des laufenden Punktes ist.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

2.1.4 Koordinatengleichung der Ebene

$$Ax + By + Cz = D \tag{2.21}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} A & B & C \end{pmatrix} \qquad \text{Normalenvektor auf die Ebene} \tag{2.22}$$

$$D = \vec{n} \circ \vec{p} \qquad \vec{p}\text{: Punkt der Ebene} \tag{2.23}$$

2.1.5 Skalarprodukt

$$\vec{a} \circ \vec{b} = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \cos\omega \tag{2.24}$$

$$\underline{a}' \cdot \underline{b} = \sum_{i=1} a_i \cdot b_i \tag{2.25}$$

$$\vec{a} \circ \vec{a} = ||\vec{a}||^2 \tag{2.26}$$

$$\text{wenn}\omega = k\frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z} \qquad \Rightarrow \quad \vec{a} \circ \vec{b} = 0 \tag{2.27}$$

$$0 < \omega \, \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{a} \circ \vec{b} > 0 \tag{2.28}$$

$$\frac{\pi}{2} < \omega < \pi \Rightarrow \vec{a} \circ \vec{b} < 0 \tag{2.29}$$

$$\text{Kommutativität:} \quad \vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a} \tag{2.30}$$

$$\text{Distributivität:} \quad \vec{a} \circ \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c} \tag{2.31}$$

$$\textbf{KEINE}\ \text{Assoziativität} \quad \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \circ \vec{c}\right) \neq \left(\vec{a} \circ \vec{b}\right) \cdot \vec{c} \tag{2.32}$$

2.1.6 Vektorprodukt

$$\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b} \qquad \vec{v}\ \text{steht senkrecht auf}\ \vec{a}\ \text{und}\ \vec{b} \tag{2.33}$$

$$||\vec{v}|| = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \sin\alpha \tag{2.34}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{a} = 0 \tag{2.35}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{b} = 0 \tag{2.36}$$

$$\textbf{KEINE}\ \text{Kommutativität} \quad \vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \tag{2.37}$$

$$\textbf{KEINE}\ \text{Assoziativität} \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \tag{2.38}$$

$$\text{Distributivität} \quad (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \tag{2.39}$$

2.1.7 Spatprodukt

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \tag{2.40}$$

$$\text{Distributivität} \quad [\vec{a_1} + \vec{a_2}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a_1}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{a_2}, \vec{b}, \vec{c}] \tag{2.41}$$

$$[\alpha\vec{a}, \beta\vec{b}, \gamma\vec{c}] = \alpha\beta\gamma[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \tag{2.42}$$

2.1.8 Cachy-Schwarz-Ungleichung

$$\left|\vec{a} \circ \vec{b}\right| \leq ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \tag{2.43}$$

2.1.9 Gleichung der Ebene: Hesse'sche Normalform

$$\frac{ax + by + cz - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0 \tag{2.44}$$

Der Abstand eines Punktes P von einer Ebene E wird erhalten, indem die Koordinaten des laufenden Punktes der Ebene in der Hesse'schen Normalform durch die Koordinaten von P ersetzt werden:

$$\frac{\underline{n}'\left(\underline{p} - \underline{p_0}\right)}{||\underline{n}||} \quad = \quad \text{Abstand mit Vorzeichen} \tag{2.45}$$

2.1.10 Projektion eines Vektors auf einen andern

$$\vec{a_b} = \frac{\left(\vec{a} \circ \vec{b}\right)}{||\vec{b}||^2} \cdot \vec{b} \tag{2.46}$$

2.1.11 Linearkombination

$$\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} \tag{2.47}$$

$$\alpha = \frac{[\vec{v}, \vec{b}, \vec{c}]}{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]} \tag{2.48}$$

$$\alpha = \frac{[\vec{a}, \vec{v}, \vec{c}]}{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]} \tag{2.49}$$

$$\alpha = \frac{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}]}{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]} \tag{2.50}$$

$$\tag{2.51}$$

2.1.12 Lineare Abhängigkeit

Lineare Abhänigkeit: Vektor kann als Linearkombination anderer Vektoren dargestellt werden.
Lineare Unabhängigkeit: Vektoren $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}\}$ sind linear unabhängig, wenn der Nullvektor **nur** die triviale Darstellung zulässt, d.h. wenn aus

$$\vec{0} = \alpha_1\vec{a_1} + \alpha_2\vec{a_2} + \cdots + \alpha_n\vec{a_n}$$
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_n = 0$$

folgt.

2.2 Matrizen

2.2.1 Basis eines Vektorraumes

Vektoren $\{\vec{a_1} \cdots \vec{a_n}\}$ bilden eine Basis für einen Vektorraum, wenn:

- $\{\vec{a_1} \cdots \vec{a_n}\}$ linear unabhängig sind.
- $\{\vec{a_1} \cdots \vec{a_n}\}$ den gesamten Raum aufspannen.

2.2.2 Gleichungsysteme

Lineare Gleichung mit einer unbekannten. Form: $a \cdot x = b$. Drei mögliche Fälle:

1. $a \neq 0$ $\implies$ genau eine Lösung.
2. $a = 0$ und $b \neq 0$ $\implies$ keine Lösung.
3. $a = 0$ und $b = 0$ $\implies$ unendlich viele Lösungen (jede Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist Lösung).

Lineares Gleichungsystem mit zwei Unbekannten. Form:

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = b_1$$
$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = b_2$$

wobei a_{ik} und b_i bekannt sind. Dies kann als Koordinatenpaar des Schnittpunktes interpretiert werden:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Keine Lösung falls Determinante 0 gibt:

$$a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} = 0$$

Ein lineares Gleichungsystem heisst **homogen** wenn $\underline{b} = \underline{0}$ ist.

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b} = \underline{0}$$

- homogenes, lineares Gleichungssystem hat minimum eine Lösung (die Triviale)
- homogenes, lineares Gleichungssystem hat nur die triviale Lösung wenn
  - A ist regulär (A^{-1} existiert)
  - Austauschverfahren bricht nicht vorzeitig ab
  - Zeilen-/Spaltenvektoren sind linear unabhängig
- $\underline{x}^{(1)}, \underline{x}^{(2)}$ sind Lösungen des homogenen, linearen Gleichungssystemes $A\underline{x} = \underline{0}$, dann ist auch jede Linearkombination von $\underline{x}^{(1)}$ und $\underline{x}^{(2)}$ Lösung des Systems.

Die Lösungsmenge des Sytems $\underset{n\times n}{A} \cdot \underline{x} = \underline{0}$ ist ein Vektorraum der Dimension $n - r$ wobei $r = \text{Rang}(A)$
Ein lineares Gleichungsystem heisst **inhomogen** wenn $\underline{b} \neq \underline{0}$

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b} \neq \underline{0}$$

- inhomogenes, lineares Gleichungssystem $\underset{n\times n}{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ ist genau dann eindeutig lösbar, wenn
  - A ist regulär, d.h. $\det A \neq 0, \exists A^{-1}$
  - Austauschverfahren bricht nicht vorzeitig ab
  - $\underline{b}$ lässt sich genau auf eine Art als Linearkombination der Spalten von A darstellen.

2.2.3 Determinanten

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{2.52}$$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \tag{2.53}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} \tag{2.54}$$

Determinante ist rekursiv definiert:

$$\det B = b_{11} \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} - b_{12} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} + b_{13} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} \tag{2.55}$$

$$\det B = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot UD_{1j} \tag{2.56}$$

Allgemein:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot UD_{1j} \det \underset{n\times n}{A} = \det \underset{n\times n}{AA^T} \tag{2.57}$$

- Werden in einer Determinanten zwei Zeilen (Spalten) vertauscht, so ändert sich das Vorzeichen.
- Wenn in einer Determinanten sämtliche Elemente einer Zeile (Spalte) 0 sind, so ist die Determinante gleich 0.
- Wenn in einer Determinanten zwei Zeilen (Spalten) gleich sind, dann hat die Determinante einen Wert von 0.
- Multipliziert man alle Elemente mit einer Zahl λ, so ist der Wert der Determinante gleich dem λ-fachen.

Dreiecksformen:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \tag{2.58}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \tag{2.59}$$

2.2.4 Cramer'sche Regel

Gleichungssystem (regulär):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{2.60}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2.61}$$

regulär $\implies$ $D \neq 0$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2.62}$$

$$\text{falls} D \neq 0 \Rightarrow x_1 \cdot D = D_1 \Rightarrow x_1 = \frac{D_1}{D} \tag{2.63}$$

Bemerkung: die formale Lösung ist nicht anzuwenden für grössere Gleichungssysteme.

2.2.5 Allgemeines

$$\underset{n\times n}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.64}$$

$$\underset{1\times n}{A} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \tag{2.65}$$

$$\underset{n\times 1}{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \tag{2.66}$$

mit

$$a_{ij} \in \mathbb{C}$$
$$a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Transponierte Matrix:

$$\underset{m\times n}{A} \Rightarrow \underset{n\times m}{A'} = \underset{n\times m}{A^T} \tag{2.67}$$

Spalten und Zeilen werden vertauscht.

Addition

$$\underset{m\times n}{A} + \underset{m\times n}{B} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{2.68}$$

$$s_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \tag{2.69}$$

Differenz

$$s_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \tag{2.70}$$

Algebraische Eigenschaften

$$\text{Kommutativität:} \quad A + B = B + A \tag{2.71}$$

$$\text{Assoziativität:} \quad (A + B) + C = A + (B + C) \tag{2.72}$$

$$\text{neutrales Element:} \quad A + 0 = A \qquad \forall A \qquad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{2.73}$$

$$\forall A \quad \exists \widetilde{A} \quad \text{mit} \quad A + \widetilde{A} = 0 \qquad \Longrightarrow \quad \widetilde{a_{ij}} = -a_{ij} \tag{2.74}$$

Multiplikation mit Skalar

$$\underset{n\times m}{A} \cdot \underset{m\times 1}{\underline{x}} = \underset{n\times 1}{\underline{b}} \tag{2.75}$$

$$b_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot x_j \tag{2.76}$$

Lineare Abbildungen

$$\sqrt{\frac{3}{2}}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \quad = y_1 \tag{2.77}$$

$$\frac{1}{2}x_1 - \sqrt{\frac{3}{2}}x_2 = y_2 \tag{2.78}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{2.79}$$

2.2.6 Matrixmultiplikation

$$\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times k}{B} = \underset{m\times k}{C} \tag{2.80}$$

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{m} a_{il} \cdot b_{lj} \tag{2.81}$$

Rechenregeln:

$$\text{Assoziativität:} \quad (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \tag{2.82}$$

$$\text{Distributivität von links:} \quad B \cdot (C + D) = B \cdot C + B \cdot D \tag{2.83}$$

$$\text{Distributivität von rechts:} \quad (C + D) \cdot E = C \cdot E + D \cdot E \tag{2.84}$$

$$\textbf{KEINE}\ \text{Kommutativität:} \quad A \cdot B \neq B \cdot A \tag{2.85}$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \tag{2.86}$$

$$\det A \cdot B = \det A \cdot \det B \tag{2.87}$$

2.2.7 Inverse oder Kehrmatrix

Nur reguläre ($\det A \neq 0$) Matrizen haben eine Inverse.

$$A^{-1} \cdot A = I = A \cdot A^{-1} \tag{2.88}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{gilt nur für 2x2 Matrizen} \tag{2.89}$$

Eigenschaften:

1. $A^{-1} \cdot A = I = A \cdot A^{-1}$
2. Die Inverse zu A ist **eindeutig**.

3. $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$
4. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
5. A und B seien reguläre Matrizen: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Austauschverfahren zu Berechnung von A^{-1}: $\begin{array}{ccc} & x_1 & x_2 \\ y_1 & a_{11} & a_{12} \\ y_2 & a_{21} & a_{22} \end{array}$ Rechenregeln:

1. Das Pivot geht in reziproken Wert über:
$$a_{11}^* = \frac{1}{a_{11}} \qquad \text{mit} \quad a_{11} \neq 0$$
2. Die Elemente in der Pivot-Spalte sind durch das Pivot zu dividieren:
$$a_{21}^* = \frac{a_{21}}{a_{11}}$$
3. Die Elemente in der Pivot-Zeile sind durch das Pivot zu dividieren und das Vorzeichen ist zu wechseln:
$$a_{12}^* = -\frac{a_{12}}{a_{11}}$$
4. Restliche Elemente werden berechnet, indem man das Produkt aus dem Element der Pivot-Spalte und dem neuen Element inder Pivot-Zeile addiert:
$$\begin{aligned} a_{22}^* &= a_{22} + a_{21} \cdot a_{12}^* \\ &= a_{22} + a_{21} \cdot \left(-\frac{a_{12}}{a_{11}}\right) \\ &= a_{22} - a_{21} \cdot \frac{a_{12}}{a_{11}} \end{aligned}$$

Bemerkung: es ist verboten ein Pivot zu wählen, welches 0 ist.

2.2.8 Rang einer Matrix

Der Rang einer Matrix A ist gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilen- oder Spaltenvektoren.

$$\text{Rang}\left(\underset{n\times m}{A}\right) \leq \min(n, m) \tag{2.90}$$

Der Rang einer Matrix $\underset{n\times m}{A}$ ist gleich der Ordnung der grössten von Null verschiedenen Unterdeterminanten von A.

$$\text{Rang}\left(\underset{n\times m}{A} \cdot \underset{m\times k}{B}\right) \leq \min(\text{Rang}(A), \text{Rang}(B)) \tag{2.91}$$
$$\text{Rang}(A) \leq \min(n, m) \tag{2.92}$$
$$\text{Rang}(B) \leq \min(m, k) \tag{2.93}$$
$$\text{Rang}(A \cdot B) \leq \min(n, k) \tag{2.94}$$

2.2.9 Vektorräume

Ein Tripel $(V, \oplus, \odot)$ bestehend aus einer Menge V und zwei Operatoren $\oplus, \odot$ heisst Vektorraum, falls V abgeschlossen gegenüber den Operatoren $\oplus, \odot$ und falls sie folgende Axiome erfüllen (8):

1. Assoziativität von $\oplus$
$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z) \qquad \forall x, y, z \in V \tag{2.95}$$
2. Kommutativität von $\oplus$
$$x \oplus y = y \oplus x \qquad \forall x, y \in V \tag{2.96}$$
3. Existenz des neutralen Elements für $\oplus$
$$\exists e \in V \quad \text{so dass} \quad e \oplus x = x \qquad \forall x \in V \tag{2.97}$$

4. Existenz des inversen Elements für $\oplus$

$$\forall x \in V \quad \exists \widetilde{x} \in V \quad \text{mit} \quad x \oplus \widetilde{x} = e \qquad \forall x, \widetilde{x} \in V \tag{2.98}$$

5. Multiplikatio mit Skalar

$$\lambda \odot (\mu \odot x) = (\lambda \cdot \mu) \odot x \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \forall x \in V \tag{2.99}$$

6. Existenz des neutralen Elements für $\odot$

$$1 \odot x = x \qquad \forall x \in V \tag{2.100}$$

7. Distributivität für $\odot$

$$\lambda \odot (x \oplus y) = (\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y) \qquad \forall x, y \in V \tag{2.101}$$

8. Distributivität

$$(\lambda + \mu) \odot x = (\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x) \qquad \forall x \in V \tag{2.102}$$

2.2.10 LU-Zerlegung einer Matrix

$$\underset{n\times n}{A} = \underset{n\times n}{L} \cdot \underset{n\times n}{U} \tag{2.103}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ a_{21} & 1 & 0 & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{2.104}$$

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b} \qquad \underline{x} \quad \text{unbekannt}, \underline{b} \quad \text{bekannt} \tag{2.105}$$

$$L \cdot U \cdot \underline{z} = \underline{b} \tag{2.106}$$

$$L \cdot \underline{z} = \underline{b} \qquad \text{mit} \quad \underline{z} = U \cdot \underline{x} \tag{2.107}$$

Das System wird für $\underline{z}$ gelöst. Wenn dann $\underline{z}$ bekannt ist, wird das System $U\underline{x} = \underline{z}$ für $\underline{x}$ gelöst.

Die k-ten Zeile von U enthält die Elemente der Pivot-Zeile des k-ten Austauschschrittes.

Die k-ten Spalte von L enthält unterhalb der Diagonalen die Elemente der Pivot-Spalte des k-ten Austauschschrittes. Die Diagonale von L enthält 1.

2.3 Kegelschnitte in achsenparalleler Lage

$$A \cdot {x_1}^2 + C \cdot {x_2}^2 + 2 \cdot D \cdot x_1 + 2 \cdot E \cdot x_2 + F = 0 \tag{2.108}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 & D \\ 0 & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \tag{2.109}$$

$$\underline{x'} \cdot \Delta \cdot \underline{x} = 0 \tag{2.110}$$

$$\text{spur}(\Delta) = A + C + F \quad \widehat{=} \quad \sum \text{Diagonalelemente} \tag{2.111}$$

Kreis:

$$\begin{aligned} M = (m_1, m_2) &\qquad \text{Mittelpunkt} \\ P = (x_1, x_2) &\qquad \text{bliebiger Punkt auf Kreis} \\ R = M - P &\qquad \text{Abstand zwischen M und P} \end{aligned}$$

$$R^2 = (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 \tag{2.112}$$

$$R^2 = x_1^2 - 2 \cdot m_1 \cdot x_1 + m_1^2 + x_2^2 - 2 \cdot m_2 \cdot x_2 + m_2^2 \tag{2.113}$$

$$A \cdot x_1^2 + A \cdot x_2^2 + 2 \cdot D \cdot x_1 + 2 \cdot E \cdot x_2 + F = 0 \tag{2.114}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 & D \\ 0 & A & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \tag{2.115}$$

Bedingungen für Kreischrakter:

- $\det \rho = A^2 > 0$
- $\text{koeff}(x_1^2) = \text{koeff}(x_2^2)$
- keine gemischte Terme der Form $x_1 \cdot x_2$

Tangente an Kreis:

$$(x_1 - m_1)(p_1 - m_1) + (x_2 - m_2)(p_2 - m_2) = R^2 \tag{2.116}$$

Steigung der Geraden durch M und P:

$$\frac{p_2 - m_2}{p_1 - m_1} \tag{2.117}$$

Steigung der Tangenten durch P:

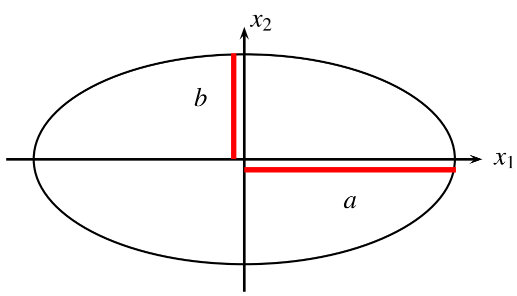
$$-\frac{p_1 - m_1}{p_2 - m_2} \tag{2.118}$$

Gleichung der Tangente

$$\frac{x_2 - p_2}{x_1 - p_1} = -\frac{p_1 - m_1}{p_2 - m_2} \tag{2.119}$$

2.3.1 Ellipse in der Ebene

Definition: Die Ellipse ist der geometrische Ort der Punkte der Ebene, für welche die Summe der Abstände zu zwei festen Punkten F_1, F_2 (Brennpunkte) konstant ist.



$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \qquad \text{mit} \quad a, b \quad \text{als Achsenabschnitte} \tag{2.120}$$

Parameter-Gleichung:

$$x_1 = m_1 + a \cdot \cos t$$
$$x_2 = m_2 + b \cdot \sin t$$

Gleichung der Tangente durch elliptischen Punkt P:

$$\frac{(x_1 - m_1)(p_1 - m_1)}{a^2} + \frac{(x_2 - m_2)(p_2 - m_2)}{b^2} = 1 \tag{2.121}$$

2.3.2 Hyperbel in der Ebene

Definition: Die Hyperbel ist der geometrische Ort der Punkte der Ebene für welche die Differenz der Abstände zu zwei festen Punkten (Brennpunkte), dem Betrag nach konstant ist.

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \tag{2.122}$$

Brennachse parallel der x_1-Achse: $+\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$
Brennachse parallel der x_2-Achse: $-\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$

Hyperbeläste:

$$x_2 = +\frac{b}{a}\sqrt{x_1^2 - a^2}$$
$$x_2 = -\frac{b}{a}\sqrt{x_1^2 - a^2}$$
$$x_2 = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 + x_1^2}$$
$$x_2 = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 + x_1^2}$$

Mögliche Parametergleichung der Hyperbel:

$$\cosh: \quad x \longmapsto \frac{\exp^x + \exp^{-x}}{2} \tag{2.123}$$
$$\sinh: \quad x \longmapsto \frac{\exp^x - \exp^{-x}}{2} \tag{2.124}$$
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x \equiv 1 \tag{2.125}$$

$$x_1 = a \cdot \cosh t x_2 = b \cdot \sinh t$$

$$x_1 = a \cdot \sinh t x_2 = b \cdot \cosh t$$

$$x_1 = -a \cdot \cosh t x_2 = b \cdot \sinh t$$

Satz: Jede Hyperbel besitzt ein paar Asymptoten, die sich im Mittelpunkt der Hyperbel schneiden und symmetrisch sind zu den Hyperbelachsen.

$$A \cdot x_1^2 + 2 \cdot B \cdot x_1 \cdot x_2 + C \cdot x_2^2 + 2 \cdot D \cdot x_1 + 2 \cdot E \cdot x_2 + F = 0 \tag{2.126}$$

2.3.3 Parabel in achsenparalleler Lage

Definition: Die Parabel ist der geometrische Ort der Punkte, für welche das Verhältnis des Abstandes zu einem festen Punkt F (Brennpunkt) und zu einer festen Geraden d (Leitlinie) gleich ist.

$$x_2^2 = 2 \cdot \exp \cdot x_1 \tag{2.127}$$

Verschiebung der Parabel parallel zu Achsen:

$$(x_2 - a_2)^2 = 2 \cdot \exp \cdot (x_1 - a_1) \tag{2.128}$$
$$A \cdot x_2^2 + 2 \cdot D \cdot x_1 + 2 \cdot E \cdot x_2 + F = 0 \tag{2.129}$$

Allgemeine Form:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & D \\ 0 & A & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \tag{2.130}$$
$$\det \rho = 0 \tag{2.131}$$
$$\det \delta = D \cdot (-A \cdot D) \tag{2.132}$$

Gleichung der Tangente:

$$\frac{x_2 - p_2}{x_1 - p_1} = \frac{\exp}{p_2} \tag{2.133}$$
$$x_2 = \frac{\exp}{p_2}(x_1 - p_1) + p_2 \tag{2.134}$$

Schnittpunkt der Tangente mit x_2-Achse:

$$x_2 = \frac{\exp}{p_2}(x_1 - p_1) + p_2 \tag{2.135}$$
$$x_1 = 0 \tag{2.136}$$

$$x_2 = -\frac{\exp \cdot p_1}{p_2} + p_2 \tag{2.137}$$
$$x_1 = 0 \tag{2.138}$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = \frac{p_2}{2} \tag{2.139}$$

2.4 Lineare Abbildungen

Definition: Eine Abbildung ist linear, wenn für alle $\underline{x}, \underline{y} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ folgendes gilt:

$$f(\underline{x} + \underline{y}) = f(\underline{x}) \oplus f(\underline{y}) \tag{2.140}$$
$$f(\lambda \cdot \underline{x}) = \lambda \odot f(\underline{x}) \tag{2.141}$$

Definition des Kerns: Der Kern von f ist die Menge der Vektoren $\underline{x} \in V$, die auf den Nullvektor abgebildet werden.

$$\text{Kern} = \{\underline{x} | \underline{x} \in V, f(\underline{x}) = \underline{0}\} \tag{2.142}$$
$$f(\underline{x}) = A \cdot \underline{x} = \underline{0} \tag{2.143}$$

Satz: Der Kern der linearen Abbildung $f : V \longmapsto W$ ist ein Untervektorraum von W.
Definition: Die Menge der Bildvektoren von V in W heisst Bild von f:

$$\text{Bild}(f) = \{\underline{p} \in W, \underline{p} = f(\underline{x}) \quad \text{mit} \quad \underline{x} \in V\} \tag{2.144}$$

Statt Bild auch: image(f), f(V)
Satz: Das Bild von $f(W)$ ist ein Untervektorraum von W.
Definition: Sei f eine lineare Abbildung von V in W. Ist $f(V)$ endlich dimensional, dann heisst die Dimension von $f(V)$ der Rang der Abbildung f.

$$\text{Rang}(f) = \text{Dimension von} \quad f(V) \tag{2.145}$$

2.4.1 Abbildung als Matrix

$$V \longmapsto W \tag{2.146}$$
$$f(\underline{x}) = \underline{x}^* \tag{2.147}$$
$$A \cdot \underline{x} = \underline{x}^* \tag{2.148}$$
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.149}$$

Die Spaltenvektoren sind die Bilder der Basisvektoren.

2.4.2 Lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$

Die Elemente der (Kolonnen) Spalten der Abbildungsmatrix sind die Komponenten der Bilder der Grundvektoren.

$$A \cdot \underline{x} = f(\underline{x}) \tag{2.150}$$

Satz: Eine lineare Abbildung ist dann und nur dann Umkehrbar, wenn diese Abbildungsdeterminante von Null verschieden ist.
Ist A die Matrix der Abbildung f, so ist A^{-1} die Matrix der Abbildung f^{-1}.
Lineare abbildungen mit **positiver** Determinante sind Orientierungserhaltend. Abbildungen mit **negativer** Determinante kehren die Orientierung um.

2.4.3 Zusammengesetzte Abbildungen

Seien g_1, g_2 lineare Abbildungen. Das Produkt $g_2\left(g_1(\underline{x})\right)$ von linearen Abbildungen ist wieder eine lineare Abbildung, deren Matrix dem Produkt der zugehörigen Matrizen $A_2 \cdot A_1$ in der gleichen Reihenfolge entspricht.

2.4.4 Allgemeine Eigenschaften

- Das Bild einer Geraden ist wieder eine Gerade.
- Das Bild einer Geraden durch den Nullpunkt ist wieder eine Gerade durch den Nullpunkt.
- Lineare Abbildungen bewahren die parallele Lage von Geraden.

2.4.5 Bild eines Gitters

Das Verhältnis der Inhalte der schraffierten Flächen ist durch den Betrag der Abbildungsdeterminante gegeben.

$$\det A = \frac{||\hat{\underline{e_1}} \times \hat{\underline{e_2}}||}{||\underline{e_1} \times \underline{e_2}||} \tag{2.151}$$

Satz: Betragsmässig ist der Wert der Determinante einer Abbildungsmatrix gleich dem Verhältnis zugeordnete Volumen im $\mathbb{R}^n$.

2.4.6 Spezielle Abbildungen

Abbildungen welche das Skalarprodukt invariant lassen:

$$\underline{x}' \cdot \underline{y} = \hat{\underline{x}}' \cdot \hat{\underline{y}} \tag{2.152}$$

- Falls f das Skalarprodukt invariant lässt, dann ist f Längentreu.
- Die Beträge der Winkel bleiben erhalten. Winkeltreu bis auf das Vorzeichen.

2.4.7 Längentreue Abbildungen

$$A^T \cdot A = I \tag{2.153}$$

A ist orthonormiert, d.h. die Spaltenvektoren sind orthogonal und haben die Länge 1.

Die Längentreuen Abbildungen sind durch orthonormierte Abbildungsmatrizen gekennzeichnet.

$$A^T \cdot A = I = A \cdot A^T \tag{2.154}$$

$$\Longrightarrow \det A = +1 \quad \text{oder} \quad -1 \tag{2.155}$$

$$\Longrightarrow A^{-1} = A^T \tag{2.156}$$

2.4.8 Spiegelung an beliebiger Ebene durch 0

$$f : \underline{x} \longmapsto \underline{x} - 2 \cdot (\underline{x}' \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n} \tag{2.157}$$

$$\Longrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 - 2n_1^2 & -2n_1n_2 & -2n_1n_3 \\ -2n_1n_2 & 1 - 2n_2^2 & -2n_2n_3 \\ -2n_1n_3 & -2n_2n_3 & 1 - 2n_3^2 \end{pmatrix} \tag{2.158}$$

2.4.9 Drehung um eine beliebige Ache mit Winkel ω

$$||\underline{a}|| = \tan\frac{\omega}{2}\underline{v}^* = \frac{1}{1 + ||\underline{a}||^2} \cdot \left[\left(1 - ||\underline{a}||^2\right) \cdot \underline{v} + 2 \cdot (\underline{a}' \cdot \underline{v}) \cdot \underline{a} + 2 \cdot (\underline{a} \times \underline{v})\right] \tag{2.159}$$

$$\Longrightarrow \quad A = \frac{1}{1 + ||\underline{a}||^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 & 2(a_1 \cdot a_2 - a_3) & 2(a_1 \cdot a_3 - a_2) \\ 2(a_1 \cdot a_2 + a_3) & 1 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 & 2(a_2 \cdot a_3 - a_1) \\ 2(a_1 \cdot a_3 - a_2) & 2(a_2 \cdot a_3 + a_1) & 1 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 \end{pmatrix} \tag{2.160}$$

2.4.10 Drehungen

Drehung um die X-Achse im $\mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos & -\sin \\ 0 & \sin & \cos \end{pmatrix} \tag{2.161}$$

Drehung um die Y-Achse im $\mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} \cos & 0 & \sin \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin & 0 & \cos \end{pmatrix} \tag{2.162}$$

Drehung um die Z-Achse im $\mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} \cos & -\sin & 0 \\ \sin & \cos & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.163}$$

Satz: Jede orthonormierte Matrix A mit $\det A = 1$ stellt eine Drehung dar. Der Drehwinkel ω ist gegeben durch:

$$\cos\omega = \frac{\mathrm{Spur}(A) - 1}{2} \tag{2.164}$$

wobei

$$\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{2.165}$$

$$\cos\omega = \frac{1 - \|\underline{a}\|^2}{1 + \|\underline{a}\|^2} \tag{2.166}$$

2.4.11 Perspektive Affinität

Die Abbildung

$$f : \underline{x} \longmapsto \underline{x} - (\underline{x}' \cdot \underline{n}) \cdot \underline{r} \tag{2.167}$$

ist linear.

2.5 Eigenwerte, Eigenvektoren

Ein Vektor ($\underline{x} \neq \underline{0}$), welcher bei einer linearen Abbildung f seine Richtung (nichtnotwendigerweise seine Länge) beibehält, heisst Eigenvektor von f.

Sie sind durch folgende Gleichung gekennzeichnet:

$$f(\overrightarrow{x}) = \lambda \cdot \overrightarrow{x} \qquad \mathrm{mit}\underline{x} \neq \underline{0} \tag{2.168}$$

Ist A die Abbildungsmatrix. $\underline{x}$ ist Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ, wenn folgendes gilt:

$$\underset{n\times n}{A} \cdot \underline{x} = \lambda \cdot \underline{x} \qquad \underline{x} \neq \underline{0} \tag{2.169}$$

$$\left(\underset{n\times n}{A} - \lambda \cdot \underset{n\times n}{I}\right) \cdot \underline{x} = \underline{0} \tag{2.170}$$

Satz:

1. Jede $n \times n$ reelle **symmetrische** Matrix A hat n reelle Eigenwerte.
2. Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind zueinander orthogonal.
3. Es ist immer möglich Eigenvektoren, welche zu mehrfachen Eigenwerten gehören, so zu wählen, dass sie orthogonal zueinander sind.

Satz: Jede reelle symmetrische Matrix A lässt sich wie folgt zerlegen:

$$A = \Gamma\Lambda\Gamma^{-1} \tag{2.171}$$

mit Γ orthonormiert (d.h.: $\Gamma^{-1} = \Gamma^T$) und Λ diagonal.

Γ ist die Matrix der orthogonormierten Eigenvektoren von A. Λ ist die Matrix der Eigenwerte von A.

$\underline{g}^{(i)}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert λ_i.

$$A \cdot \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{g}^{(1)} & \underline{g}^{(2)} & \cdots & \underline{g}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{g}^{(1)} & \underline{g}^{(2)} & \cdots & \underline{g}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{2.172}$$

$$\Longrightarrow \quad A = \Gamma \cdot \Lambda \cdot \Gamma^{-1} \tag{2.173}$$

Bei orthogonalen Transformationen bleiben Spur und Determinante von quadratischen Matrizen invariant.
Bei orthogonalen Transformationen mit Transformationsmatrix S geht eine Matrix A in die Matrix $S \cdot A \cdot S^T$ über.

$$\mathrm{Spur}(S \cdot A \cdot S^T) = \mathrm{Spur}(A) \tag{2.174}$$

$$\det S \cdot A \cdot S^T = \det A \tag{2.175}$$

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{Transformationsmatrix} \tag{2.176}$$

$$S^{-1} = \frac{1}{\det S} \begin{pmatrix} s_{22} & -s_{12} \\ -s_{21} & s_{11} \end{pmatrix} \tag{2.177}$$

$$\vec{E}_j = \sum_{i=1}^{2} s_{ji} \cdot \vec{e}_j \tag{2.178}$$

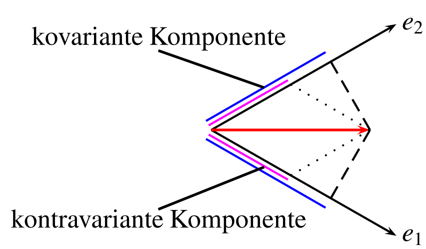
$$\underline{x} = S^T \cdot \underline{X} \tag{2.179}$$

$$\underline{X} = (S^{-1})^T \cdot \underline{x} \tag{2.180}$$

Die Komponenten transformieren sich **nicht** wie die Grundvektoren. Sie heissen **kontravariante** Komponenten.

2.6 Koordinatentransformationen

Die **kovarianten** Komponenten transformieren sich wie die Grundvektoren.



2.7 Übergang von orthogonalen Koordinatensystemen

Der Übergang zwischen zwei cartesischen Koordinatensystemen mit dem gleichem Ursprung ist durch eine orthonormierte Transformationsmatrix gekennzeichnet.

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \tag{2.181}$$

$$S_{ij} = \vec{E}_i \odot \vec{e}_j \tag{2.182}$$

Die Determinante einer orthogonalen Koordinatentransformation hat immer den Wert ± 1, $+1$ wenn die Orientierung der beiden Systeme gleich sind, sonst -1.

$$\det S = \pm 1 \tag{2.183}$$

2.7.1 Inverse Transformation

$$S^{-1} = S^T \qquad S \quad \text{ist orthogonal} \tag{2.184}$$

Eine quadratische Matrix, welche nach Zeilen orthogonal ist, ist von selbst nach Spalten orthogonal.

$$\underline{X} = S \cdot \underline{x} \tag{2.185}$$

$$\underline{X} = (S^{-1})^T \cdot \underline{x} \tag{2.186}$$

Bei einer orthogonalen Koordinatentransformation sind die neuen Vektorkomponenten bzw. Punktkoordinaten Linearformen der alten (homogene lineare Funktion), wobei die Matrix der Koeffizienten mit der Transformationsmatrix S übereinstimmen.

2.8 Eulersche Winkel

Die relative Lage von zwei cartesischen Koordinatensystemen mit dem gleichen Ursprung lässt sich mit Hilfe von 3 Drehwinklen vollständig beschreiben.

- ψ Winkel zwischen $\overrightarrow{e_1}$ und der Schnittgerade s der $\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$ - Ebene mit der $\overrightarrow{E_1} - \overrightarrow{E_2}$ - Ebene.
- ϕ Winkel zwischen s und $\overrightarrow{E_1}$
- θ Winkel zwischen $\overrightarrow{e_3}$ und $\overrightarrow{E_3}$

Satz von Euler: Die allgemeine Auslenkung eines starren Körpers von dem ein Punkt festgehalten wird, ist eine Drehung um eine Achse um diesen Punkt.

2.9 Hauptachsentheorem

Quadratische Form in zwei Variablen:

$$Q_{(x_1,x_2)} = a_{11} \cdot x_1^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + a_{22} \cdot x_2^2 \tag{2.187}$$

$$\underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{symmetrisch!} \tag{2.188}$$

$$A \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \\ a_{12} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \end{pmatrix} \tag{2.189}$$

Eine Gleichung der Form $Q_{(\underline{x})} = C$ mit C fest, ist eine Gleichung eines Kegelschnittes mit Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems, falls der Mittelpunkt existiert.

Ein cartesisches Koordinatensystem in welchem eine quadratische Form Q kein gemischtes Glied aufweist wird als Hauptachsensystem bezeichnet.

Bezüglich diesem System hat die quadratische Form folgende Gestalt:

$$\lambda_1 \cdot x_1^2 + \lambda_2 \cdot x_2^2 \tag{2.190}$$

Der Kegelschnitt mit der Gleichung

$$a_{11} \cdot x_1^2 + a_{22} \cdot x_2^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 \tag{2.191}$$

kann aufgrund der Eigenwerte der Koeffizienzmatrix klassifiziert werden.

$$\delta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \tan 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \tag{2.192}$$

$\alpha \hat{=}$Drehwinkel der Transformationsmatrix $\Rightarrow$ Hauptachsen

$$\det \delta > 0 \Longrightarrow \qquad \text{Ellipse} \tag{2.193}$$

$$\det \delta = 0 \Longrightarrow \qquad \text{Parabel} \tag{2.194}$$

$$\det \delta < 0 \Longrightarrow \qquad \text{Hyperbel} \tag{2.195}$$

2.9.1 Kegelschnitte in allgemeiner Lage

Der geometrische Ort aller Punkte deren Koordinaten bezüglich eines bestimmten Koordinatensystems folgende Gleichung zweiten Grades erfüllen, wird Kurve zweiter Ordnung genannt.

$$a_{11} \cdot x_1^2 + 2 \cdot a_{22} \cdot x_1 \cdot x_2 + a_{22} \cdot x_2^2 + 2 \cdot b_1 \cdot x_1 + 2 \cdot b_2 \cdot x_2 + C = 0 \tag{2.196}$$

Matrizenscheibweise: $\underline{x}^T \cdot \Delta \underline{x} = 0$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \tag{2.197}$$

mit $a_{12} = a_{21}$ und Δ ist symmetrisch.
Ist die Gleichung einer Kurve 2. Ordnung mit dem Ursprung $O = (0, 0)$ frei von linearen Gliedern, so ist der Punkt O ein Mittelpunkt der Kurve. Ist ein Mittelpunkt vorhanden, dann gibt es zu jedem Punkt (x_1, x_2) einen symmetrischen Punkt $(-x_1, -x_2)$ auf der Kurve. Die Koordinaten (m_1, m_2) des Mittelpunkts einer Kurve 2. Ordnung $F(x_1, x_2) + C = 0$ sind die Lösungen des Systems:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0 \qquad a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + b_1 = 0 \tag{2.198}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0 \qquad a_{12} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + b_2 = 0 \tag{2.199}$$

Die Kurve besitzt also nur dann einen Mittelpunkt, wenn das obige Gleichungssystem lösbar ist, d.h.

$$\det \delta \neq 0 \qquad \text{mit} \quad \delta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{2.200}$$

Der Typ der Kurve kann mit Hilfe von δ bezogen auf das ursprüngliche System bestimmt werden. Insbesondere die Lage der Kurve (Eigenvektoren von δ) und die Längen der Halbachsen.

$$c \rightsquigarrow \widetilde{c} = \frac{\det \Delta}{\det \delta} \tag{2.201}$$

$$\widetilde{c} = F(m_1, m_2) + C \tag{2.202}$$

$$\widetilde{c} = \frac{1}{2} L(m_1, m_2) + C \tag{2.203}$$

mit $L(m_1, m_2) = 2 \cdot b_1 \cdot m_1 + 2 \cdot b_2 \cdot m_2$ (lineare Form).

$$(x_1, x_2) \rightsquigarrow (\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2}) \quad \det \Delta \text{ und } \det \delta \text{ bleigen invariant} \tag{2.204}$$

$$(\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2}) \rightsquigarrow (x_1, x_2) \quad \det \delta, \widetilde{c} \text{ und } \det \Delta \text{ bleiben invariant} \tag{2.205}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & C \end{pmatrix} \tag{2.206}$$

$$\delta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{2.207}$$

$$\sigma = \mathrm{Spur}(\delta) \tag{2.208}$$

	$\det \Delta \neq 0$		$\det \Delta = 0$
$\det \delta > 0$	$\sigma \cdot \det \Delta < 0$	reelle Ellipse	2 imaginäre Geraden oder 1 Punkt
	$\sigma \cdot \det \Delta > 0$	imaginäre Ellipse	
$\det \delta < 0$	Hyperbel		ein Paar sich schneidende Geraden
$\det \delta = 0$	Parabel		ein Paar parallele Geraden reell oder imaginär

2.10 Kleinste Quadrate

Modell: $y_i = a_0 + a_1 \cdot x_i + r_i$
linear in den Parametern a_0, a_1
Messdaten: (x_i, y_i) mit x_i Fehlerfrei und y_i mit zufälligem Fehler. Fehler, Residuum: r_i

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a_0 + a_1 \cdot x_i)]^2 \tag{2.209}$$

Beispiele von Modellen:

$$y_i = a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot x_i^2 + r_i \tag{2.210}$$
$$y_i = a_1 + a_2 \cdot \exp^{-x_i} + r_i \tag{2.211}$$
$$\Longrightarrow \ln x_i = \ln a_i - x_i \cdot a_2 + \ln r_i \tag{2.212}$$
$$\Longrightarrow z_i = b_1 - x_i \cdot b_2 + \widetilde{r_i} \qquad \text{Substituiert} y_i \qquad = a_1 \cdot \sin x_i + r_i \tag{2.213}$$

2.10.1 Matrizenschreibweise des linearen Modells

$$\underline{y} = X \cdot \underline{a} + \underline{r} \tag{2.214}$$

mit

$\underline{y}$	Vektor der Messwerte (bekannt)
X	Designmatrix (bekannt)
$\underline{a}$	Vektor der Parameter (unbekannt)
$\underline{r}$	Vektor der Residuen (unbekannt)

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \tag{2.215}$$

$$||\underline{y} - X\underline{a}||^2 = ||\underline{y}||^2 + \underline{a}^T X^T X \underline{a} - 2 \cdot \underline{y}^T X \underline{a} \tag{2.216}$$

2.10.2 Fehlergleichung

$$y_i = a_0 + a_1 \cdot x_i + r_i \tag{2.217}$$
$$\underline{y} = X \cdot \underline{a} + \underline{r} \tag{2.218}$$

2.10.3 Spezialfall: Parameter einer Ausgleichsgeraden

Model: $y_i = a_0 + a_1 \cdot x_i + r_i$

$$n \cdot a_0 + a_1 \sum x_i = \sum y_i \tag{2.219}$$
$$a_0 \cdot \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 = \sum x_i \cdot y_i \tag{2.220}$$

Normalengleichungsystem

$$\hat{a}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \overline{y} \\ n\overline{x} & \sum x_i \cdot y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \overline{x} \\ n\overline{x} & \sum x_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{\sum x_i \dot{y}_i - n \cdot \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sum x_i^2 - n\overline{x}^2} \tag{2.221}$$

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum (x_i - \overline{x})^2} \tag{2.222}$$

Die erste Variante ist numerisch sehr schlecht. Besser ist die zweite Variante. Obige Formeln sind analog für a_0 anzuwenden.

2.10.4 Normalengleichungsystem

Matrizenschreibweise:

$$(X^T X)\underline{a} = X^T \underline{y} \tag{2.223}$$

Formale Lösung, numerisch **sehr** schlecht, funktioniert aber für alle lienaren Modelle!

$$\underline{\hat{a}} = (X^T X)^{-1} X^T \underline{y} \tag{2.224}$$

2.10.5 Formale bestimmung der Parameter

$$t = \underline{a}^T \underline{y} \tag{2.225}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \underline{a}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial t}{\partial a_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial t}{\partial a_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial}{\partial \underline{a}} \underline{a}^T \underline{y} = \underline{y} \tag{2.226}$$

$$Q = \underline{a}^T S \underline{a} \tag{2.227}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \underline{a}} \implies \frac{\partial}{\partial \underline{a}} \underline{a}^T S \underline{a} = 2 \cdot S \underline{a} \tag{2.228}$$

$$||\underline{r}||^2 = ||\underline{y} - X\underline{a}||^2 = ||\underline{y}||^2 - 2\underline{a}^T X^T \underline{y} + \underline{a}^T S \underline{a} \quad \text{mit} \quad S = X^T X \tag{2.229}$$

Ableitung von $||\underline{r}||^2$ nach $\underline{a}$:

$$\frac{\partial}{\partial \underline{a}} ||\underline{r}||^2 = \frac{\partial}{\partial \underline{a}} \left(||\underline{y}||^2 - 2\underline{a}^T X^T \underline{y} + \underline{a}^T S \underline{a} \right) \tag{2.230}$$

$$\implies \qquad X^T X \underline{a} = X^T \underline{y} \tag{2.231}$$

2.11 Simplex-Algorithmus

Eine lineare Ungleichung zerlegt den n-Dimensionalen Raum in zwei Halbräume. In einem Halbraum ist die Gleichung erfüllt, im andern nicht.

Eine lineare Funktion, welche auf einer abgeschlossenen konvexen Menge definiert ist, nimmt ihren Maximalwert und ihr Minimalwert auf dem Rand der Menge an.

2.11.1 Idee

Von einer bekannten Ecke des zulässigen Gebietes aus, schreitet man auf dem Rande von Ecke zu Ecke jeweils in einer Richtung fort in welcher die Zielfunktion zunimmt.

Jede Ecke des Polygons am Rande des zulässigen Gebietes ist dadurch charakterisiert, dass mindestens zwei der beteiligten Variablen 0 sind, während die übrigen einem nicht negativen Wert haben.

2.11.2 Beispiel

Lineares Ungleichungssystem:

$$10x_1 + 20x_2 \leq 1100 \tag{2.232}$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 160 \tag{2.233}$$

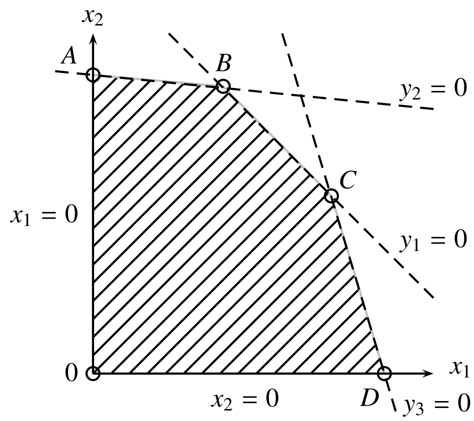
$$x_1 + x_2 \leq 100 \tag{2.234}$$

$$x_1 \geq 0 \tag{2.235}$$

$$x_2 \geq 0 \tag{2.236}$$

$$\tag{2.237}$$

Zielfuntktion: $40x_1 + 120x_2$ muss maximiert werden.



Organisation: einführen von Schlupfvariablen

$$y_1 = -110x_1 - 20x_2 + 1100 \tag{2.238}$$
$$y_2 = -x_1 - 4x_2 + 160 \tag{2.239}$$
$$y_3 = -x_1 - x_2 + 100 \tag{2.240}$$

wobei

$$y_i \geq 0 \qquad i = 1 \ldots 3 \tag{2.241}$$
$$x_i \geq 0 \qquad i = 1 \ldots 2 \tag{2.242}$$

Zielfunktion: $z = 40x_1 + 120x_2$

Schema für Ecke 0 ($x_1 = 0, x_2 = 0$):

	x_1	x_2	1
$y_1 =$	-10	-20	1100
$y_2 =$	-1	-4	160
$y_3 =$	-1	-1	100
$z =$	40	120	0

Schema für Ecke A ($x_1 = 0, y_2 = 0$):

	x_1	y_2	1
$y_1 =$	-5	5	300
$x_2 =$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	40
$y_3 =$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	60
$z =$	10	-30	4800

Der Punkt ist zulässig, denn alle nicht-Basisvariablen sind in diesem Punkt nicht negativ.

Von Schema 0 zu Schema A gelangt man, indem man per Austauschverfahren die Variablen x_2 und y_2 vertauscht. Das Pivot war -4. usw. ...

Das Optimum ist in Punkt B erreicht, denn alle Elemente der Zielfunktion (ausser ihrem Wert) sind negativ.

Der Weg längs des Randes des Polytops ist wie folgt zu wählen:

	x_1	$\cdots$	x_q	$\cdots$	x_n	1
$y_1 =$			a_{1q}			b_1
$\vdots$						
$y_i =$			a_{iq}			b_i
$\vdots$						
$y_m =$			a_{mq}			b_m
$z =$	c_1	$\cdots$	c_q	$\cdots$	c_n	d

1. In der neuen Ecke sollte der Wert d' der Zielfunktion grösser als d werden.

2. Die neue Ecke soll auf dem Rande des zulässigen Gebietes liegen $\Longrightarrow \quad b'_i \geq 0 \forall i$

$$d' \geq d$$
$$b'_i \geq 0 \forall i \qquad \text{insbesondere:} \quad b'_p \geq 0$$

- Die Pivot-Kolonne ist so zu wählen, dass ihr Element c_q in der Zeile der Zielfunktion positiv allenfalls 0 ist.
- In der gewählten Pivotkolonne muss das Element a_{pq} negativ sein. Die Pivot-Zeile ist bestimmt durch den absolut kleinsten Quotienten $\frac{b_i}{|a_{iq}|}$, welche mit dem negativen Elementen a_{iq} der Pivotkolonne gebildet werden.

Das Verfahren kann auf folgende Arten abbrechen:

1. Alle Elemente der Zielfunktion sind negativ. Das gesuchte Optimum wurde erreicht, denn die Zielfunktion kann nicht mehr zunehmen.
2. Es gibt zwar positive Elemente in der Zielfunktionszeile, aber in der dazugehörigen Spalte sind alle Elemente grösser 0, d.h. die Zielfunktion kann beliebig gross gemacht werden.

2.11.3 Zusammenfassung

Optimum ist erreicht	Alle $b_i \geq 0$ und alle $c_i \leq 0$
Zielfunktion ist unbeschränkt	$\exists k$ mit $c_k > 0$ und alle $a_{ik} \geq 0 \forall i$ in Spalte k
das lineare Programm hat keine Lösung	$\exists i$ mit $b_i < 0$ und $a_{ik} \leq 0 \forall k$ in Zeile i

2.12 Normen

2.12.1 Normen von Vektoren

Unter der Norm $\|\underline{x}\|$ eines Vektors $\underline{x}$ versteht man eine reelle Funktion von $\underline{x}$ mit dem folgenden Eigenschaften:

1. $\|\underline{x}\| \geq 0 \qquad \|\underline{x}\| = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}$
2. $\|\lambda\underline{x}\| = |\lambda| \cdot \|\underline{x}\| \qquad \lambda$ ein Skalar
3. $\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$ Dreiecksungleichung

Beispiele von Normen

$$\|\underline{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad l_1 - \text{Norm} \tag{2.243}$$

$$\|\underline{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \qquad l_2 - \text{Norm, euklidsche Norm} \tag{2.244}$$

$$\|\underline{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} \quad \text{mit} \quad 1 \leq p < \infty \qquad l_p - \text{Norm, Hölder-Norm} \tag{2.245}$$

$$\|\underline{x}\|_\infty = \max_i |x_i| \qquad l_\infty - \text{Norm, maximum-Norm} \tag{2.246}$$

$$\tag{2.247}$$

Es gilt:

$$\frac{1}{n}\|\underline{x}\|_1 \leq \|\underline{x}\|_\infty \leq \|\underline{x}\|_1 \leq n \cdot \|\underline{x}\|_\infty \tag{2.248}$$

2.12.2 Normen von Matrizen

Unter der Norm einer Matrix A versteht man eine Funktion $A \longmapsto ||A||$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $||A|| \geq 0 \qquad ||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
2. $||\alpha \cdot A|| = |\alpha| \cdot ||A|| \qquad \forall \alpha \in \mathbb{C}$
3. $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$
4. $||A \cdot B|| \leq ||A|| \cdot ||B||$

Beispiele von Normen

$$||A||_\infty = \max_i \sum_k |a_{ik}| \qquad \text{Summe der Spalten} \tag{2.249}$$

$$||A||_E = \sqrt{\sum_i \sum_k |a_{ik}|^2} \qquad \text{Forbenius} \tag{2.250}$$

$$||A||_1 = \max_j \sum_i |a_{ik}| \qquad \text{Summe der Zeilen} \tag{2.251}$$

$$||A|| = \lambda_{max}^{\frac{1}{2}} \tag{2.252}$$

λ_{max} als grösster Eigenwert der Matrix $A^T A$.

2.13 Konvergenz

2.13.1 Konvergenz einer Vektorfolge

Eine Vektorfolge $\left\{\underline{x}^{(k)}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen einen Vektor $\underline{x}$ falls jede Komponente der Folge gegen die entsprechende Komponente von $\underline{x}$ vonvergiert.

Damit eine unendliche Vektorfolge gegen $\underline{x}$ konvergiert, ist es notwendig und hinreichend, dass für eine beliebige Vektornorm folgendes gilt:

$$\lim_{k\to\infty} ||\underline{x}^{(k)} - \underline{x}|| = 0 \tag{2.253}$$

2.13.2 Konvergenz einer Matrixfolge

Eine Matrixfolge $A^{(k)}$ konvergiert gegen eine Matrix A falls jedes einzelne Element der Matrix $A^{(k)}$ konvergiert.

Notwendig und hinreichend für die Konvergenz für eine Matrixfolge $A^{(k)}$ gegen A:

$$\lim_{k\to\infty} ||A^{(k)} - A|| = 0 \tag{2.254}$$

In den meisten Konvergenzbetrachtungen werden sowohl Matrizen als auch Vektoren auftreten. Die Norm der Matrizen und Vektoren müssen verträglich sein:

$\|\|A\|\|_\infty$	ist durch	$\|\|\underline{x}\|\|_\infty$	induziert
$\|\|A\|\|_1$	ist durch	$\|\|\underline{x}\|\|_1$	induziert
$\|\|A\|\|_2$	ist durch	$\|\|\underline{x}\|\|_2$	induziert
$\vdots$		$\vdots$	

$||A||_E$ ist von keiner Vektornorm induziert.
Jede Matrixnorm, welche durch eine Vektornorm induziert wird, stellt eine obere Schranze für die Beträge ihrer Eigenwerte.
Sei $\underset{n\times n}{A}$ eine Matrix.
Sei $\underline{x}$ Eigenvektor von A zu λ.

$$A\underline{x} = \lambda\underline{x} \quad \Longrightarrow \frac{||A\underline{x}||}{||\underline{x}||} = |\lambda| \tag{2.255}$$

$$\max_{||\underline{x}\neq 0||} \frac{||A\underline{x}||}{||\underline{x}||} \geq |\lambda| \tag{2.256}$$

$$||A|| \geq |\lambda| \quad \forall\lambda \tag{2.257}$$

$$||A|| \geq \max|\lambda| \tag{2.258}$$

2.14 Konditionszahl einer Matrix

Die Konditionszahl ist ein Mass für die Singularität der Matrix.

Geometrische Definition:

$$\text{sei} \quad M = \max_{\underline{x} \neq \underline{0}} \frac{||A\underline{x}||2}{||\underline{x}||_2} \tag{2.259}$$

$$\text{sei} \quad m = \min_{\underline{x} \neq \underline{0}} \frac{||A\underline{x}||_2}{||\underline{x}||_2} \tag{2.260}$$

$$\kappa = \frac{M}{m} \qquad \text{je grösser, je gefährlicher numerisch} \tag{2.261}$$

Falls A regulär: $\kappa = ||A||_2 \cdot ||A^{-1}||_2$

$$\underset{n\times m}{A} = \underset{n\times m}{U} \cdot \underset{m\times m}{} \cdot V^T \tag{2.262}$$

mit

$$U^T U = I \qquad \text{Spalten sind orthonormiert} \tag{2.263}$$

$$V^T V = I \tag{2.264}$$

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & s_m \end{pmatrix} \qquad \text{mit} s_i \geq 0 \tag{2.265}$$

$$\kappa = \frac{\max s_i}{\min s_i} = \frac{\lambda_{max}^{\frac{1}{2}}}{\lambda_{min}^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}} \tag{2.266}$$

wobei

$$1 \leq \kappa \leq \infty \tag{2.267}$$

Faustregel beim Lösen eines linearen Gleichungssystems $A\underline{x} = \underline{b}$:

Bei einer d-stellingen dezimalen Gleitkommarechnung können die relativen Fehler der Ausgangsdaten von folgender Grössenordnung sein:

$$\frac{||\Delta A||}{||A||} \approx 5 \cdot 10^{-d} \tag{2.268}$$

Ist die Konditionszahl $\kappa(A) \approx 10^{\alpha}$, so gilt:

$$\frac{||\Delta x||}{||x + \Delta x||} \leq \kappa(A) \cdot \frac{||\Delta A||}{||A||} \tag{2.269}$$

$$\frac{||\Delta x||}{||\Delta x||} \leq \kappa(A) \cdot \frac{||\Delta b||}{||b||} \tag{2.270}$$

Wird ein lineares Gleichungsystem $A\underline{x} = \underline{b}$ mit d-stelligem, dezimalen Float gelöst und die Konditionszahl $\approx 10^{\alpha}$, so sind Aufgrund der unvermeidlichen Eingangsfehler nur $d - \kappa - 1$ Dezimalstellen in der Lösung $\underline{x}$ sicher.

Kapitel 3

Analysis

3.1 Allgemeines

3.1.1 Quadratische Gleichung

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \tag{3.1}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{3.2}$$

3.1.2 Funktionsgleichung

$$y = m \cdot x + q \quad \text{mit m: Steigung, q: Achenabschnitt} \tag{3.3}$$

3.1.3 Achsenabschittsgleichung

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \tag{3.4}$$

3.1.4 Koordinatengleichung

$$Ax + By + C = 0 \tag{3.5}$$

3.1.5 Satz von Vieta

$$x_1 + x_2 = -p \tag{3.6}$$

$$x_1 \cdot x_2 = q \tag{3.7}$$

3.1.6 Binominalkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \tag{3.8}$$

3.2 Grenzwerte

$$\lim_{x \to c} f(x) = l \tag{3.9}$$

Sind die einseitigen Grenzwerte nicht gleich, so existiert kein Grenzwert:

$$\text{wenn} \lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x) \quad \Rightarrow \nexists \lim_{x \to c} f(x) \tag{3.10}$$

Standardgrenzwerte:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \tag{3.11}$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \tag{3.12}$$

$$\lim_{x\to c} \sin x = \sin c \tag{3.13}$$

$$\lim_{x\to c} \cos x = \cos c \tag{3.14}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{3.15}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0 \tag{3.16}$$

$$\lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n}} = 0 \qquad \text{sofern} \quad x > 0 \tag{3.17}$$

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \qquad \text{sofern} \quad |x| > 0 \tag{3.18}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \qquad \text{mit} \quad x \in \mathbb{R} \tag{3.19}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0 \qquad \text{für} \quad \alpha > 0 \tag{3.20}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \tag{3.21}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \qquad \text{mit} \quad x \in \mathbb{R} \tag{3.22}$$

3.3 Folgen

Monotonie:

$$a_n < a_{n+1} \qquad \text{Streng monoton wachsend} \tag{3.23}$$

$$a_n \leq a_{n+1} \qquad \text{Monoton wachsend} \tag{3.24}$$

$$a_n > a_{n+1} \qquad \text{Streng monoton fallend} \tag{3.25}$$

$$a_n \geq a_{n+1} \qquad \text{Monoton fallend} \tag{3.26}$$

$$\tag{3.27}$$

Divergenz: Folge ohne Grenzwert; unbeschränkte Folge
Konvergenz: Folge mit Grenzwert; beschränkte Folge

3.4 Differenation

3.4.1 Regeln

Potenzregel

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \tag{3.28}$$

Produktregel

$$(f(x) \cdot g(x))' = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x) \tag{3.29}$$

Summenregel

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \tag{3.30}$$

Skalar

$$(\alpha \cdot f(x))' = \alpha \cdot f'(x) \tag{3.31}$$

Reziprokregel

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)} \tag{3.32}$$

Quotientenregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \tag{3.33}$$

Kettenregel

Äussere Ableitung mal innere Ableitung.

$$(f(g(x)))' = \frac{\partial y}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \tag{3.34}$$

Sontiges

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x \tag{3.35}$$

$$f'\left(f^{-1}(x)\right) \cdot \left(f^{-1}(x)\right)' = 1 \tag{3.36}$$

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} \tag{3.37}$$

Winkelfunktionen

$$\sin' \Longrightarrow \cos \tag{3.38}$$

$$\cos' \Longrightarrow -\sin \tag{3.39}$$

$$\tan' \Longrightarrow \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2 \tag{3.40}$$

$$\cot' \Longrightarrow -\frac{1}{\sin^2} = -\left(1 + \cot^2\right) \tag{3.41}$$

$$\arcsin' \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{3.42}$$

$$\arccos' \Longrightarrow -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{3.43}$$

$$\arctan' \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \tag{3.44}$$

$$\left(\cot^{-1}\right)' \Longrightarrow -\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \tag{3.45}$$

Hyperbolische Funktionen

$$\frac{\partial}{\partial x} \sinh x = \cosh x \tag{3.46}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \cosh x = \sinh x \tag{3.47}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x} \tag{3.48}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{-1}{\sinh^2 x} \tag{3.49}$$

$$\tag{3.50}$$

3.4.2 Differential

$$\partial f = f'(x) \cdot \partial x \tag{3.51}$$

3.4.3 Newton-Raphson

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{x'(x_n)} \tag{3.52}$$

3.5 Implizites Differenzieren

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial x}\left(3x^3y - 4y - 2x + 1\right) = 0 \\
9x^2y + 3x^3y' - 4y' - 2 + 0 = 0 \\
\implies \quad y' = \frac{2 - 9x^2y}{3x^3 - 4}
\end{gathered}$$

3.6 Logarithmus

$$b = \log_a(x) \qquad \hat{=} \quad \text{Exponent} \tag{3.53}$$

$$a^b = a^{\log_a(x)} = x \tag{3.54}$$

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v) \tag{3.55}$$

$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v) \tag{3.56}$$

$$\log_a(u^n) = n \cdot \log_a(u) \tag{3.57}$$

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} \tag{3.58}$$

$$(\ln(x))' = \frac{\partial}{\partial x}\ln(x) = \frac{1}{x} \tag{3.59}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\exp^x = \exp^x \tag{3.60}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\exp^y = \exp^y \cdot y' \tag{3.61}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\log_a(x) = \frac{1}{\ln(a) \cdot x} \tag{3.62}$$

3.7 Integration

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad = \qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i{}^*) \cdot \Delta x_i \tag{3.63}$$

mit:

x:	fiktive Variable
a:	untere Grenze
b:	obere Grenze

Definition: Ein Integral ist der Grenzwert einer Summe.

Bezeichnungen:

$$F(x) = \int_a^b x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$$

mit:

$F(x)$	Stammfunktion
a	untere Grenze
b	obere Grenze
x	Integrand
dx	Differenzial
c	Integrationskonstante

Unbestimmtes Integral:

$$\int_{a}^{x} f(t)\,dt = F(t) \hat{=} \text{Funktion in t} \tag{3.64}$$

Kurzschreibweise:

$$\int f(t)\,dt = F(t) \tag{3.65}$$

Bestimmtes Integral:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \quad \hat{=} \quad \text{Zahl} \tag{3.66}$$

Berechnung:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b \tag{3.67}$$

3.7.1 Linearität des Integrals

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\ dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \tag{3.68}$$

$$\int_a^b \alpha \cdot f(x)\,dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\,dx \tag{3.69}$$

3.7.2 Standardsubstitution für Integrale mit Winkelfunktionen

$$u = \tan\frac{x}{2} \tag{3.70}$$

3.7.3 Grundintegrale

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \tag{3.71}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + c \tag{3.72}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan(x) + c \tag{3.73}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c \tag{3.74}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c \tag{3.75}$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c \tag{3.76}$$

$$\int \left(\lambda + x^2\right)\,dx = \lambda \cdot x + \frac{1}{3} \cdot x^3 + c \tag{3.77}$$

3.7.4 Integration Trigonometrischer Funktionen

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c \tag{3.78}$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c \tag{3.79}$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c \tag{3.80}$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c \tag{3.81}$$

$$\int \tan x \, dx = \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + c = -\ln\cos x + c \tag{3.82}$$

$$\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + c \tag{3.83}$$

$$\int \arcsin x \, dx = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c \tag{3.84}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx = \int \frac{1}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} \, dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c \tag{3.85}$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} \, dx = \frac{1}{a} \cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c \tag{3.86}$$

$$\int \arctan x \, dx = x \cdot \arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + c \tag{3.87}$$

3.7.5 Integration hyperbolischer Funktionen

$$\int \sinh x \, dx = \cosh x + c \tag{3.88}$$

$$\int \cosh x \, dx = \sinh x + c \tag{3.89}$$

3.7.6 Integrationsmethoden

Partielle Integration

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v \tag{3.90}$$

Substitution

$$\int_{g_u}^{g_o} \sin(2x) \, dx$$

Substitution durch:

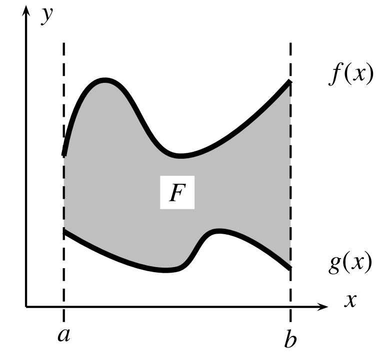
$$\begin{aligned} u &= 2x \\ du &= 2 \\ g'_u &= 2(g_u) \\ g'_o &= 2(g_o) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{g'_u}^{g'_o} \sin(u) \, du \tag{3.91}$$

Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{1}{x^2+x} \, dx \tag{3.92}$$

3.7.7 Fläche unter einer Kurve

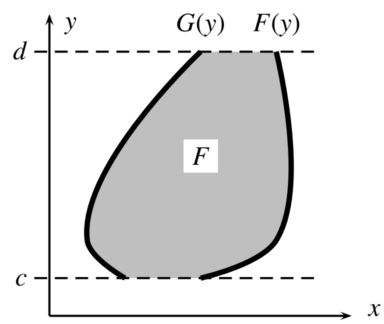


$$F = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \tag{3.93}$$

Allgemein:

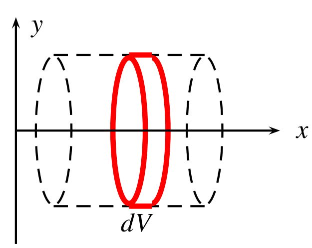
$$F = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx \tag{3.94}$$

Analog dazu:



$$F = \int_c^d |F(y) - G(y)|\,dy$$

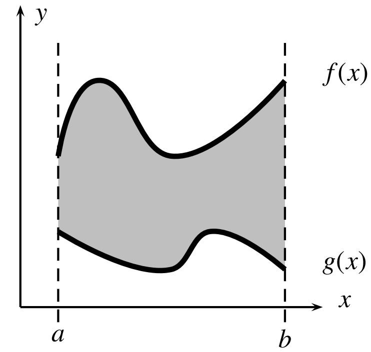
3.7.8 Volumenberechnung



$$dV = Q \cdot dx \quad \Longrightarrow \quad V = \int_a^b Q(x)\,dx \tag{3.95}$$

Q : Querschnittsfläche an der Stelle x. Kann eine Funktion von x sein.

Rotationskörper:



Rotation um die x-Achse.

$$V = \pi \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right] dx \tag{3.96}$$

3.7.9 Geometrischer Mittelpunkt: Schwerpunkt

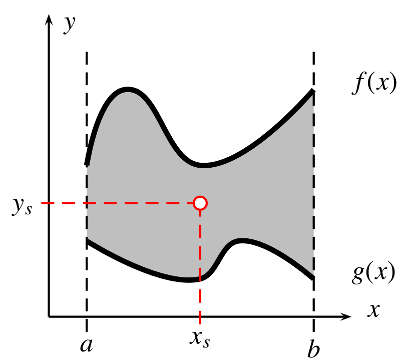
$$x_s = \frac{\int_a^b f(x) \cdot x \, dx}{\int_a^b f(x) \, dx} = \frac{\int_a^b x \, dF}{\int_a^b dF} \tag{3.97}$$

$$y_s = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) \, dx}{\int_a^b f(x) \, dx} = \frac{\int_a^b y \, dF}{\int_a^b dF} \tag{3.98}$$

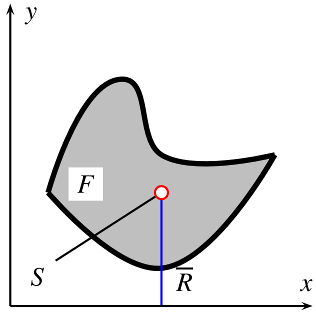
$$x_s \cdot A = \int_a^b [f(x) - g(x)] \cdot x \, dx \tag{3.99}$$

$$y_s \cdot A = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right] dx \tag{3.100}$$

Illustration:



3.7.10 Volumensatz von Pappos

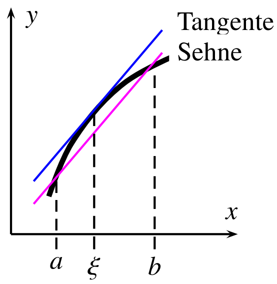


$$V = F \cdot 2 \cdot \pi \cdot \overline{R} \qquad \overline{R} \widehat{=} \text{Mittlerer Radius} \tag{3.101}$$

3.7.11 Arbeit

$$dE, dA = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \|\vec{F}\| \cdot \cos(\phi) \cdot ds \quad \Rightarrow \quad E = \oint_{weg} \vec{F}\, d\vec{s} \tag{3.102}$$

3.7.12 Mittelwertsatz



$$\exists \xi \in (a,b) \text{mit} f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \hat{=} \quad \text{mittlere Steigung} \tag{3.103}$$

3.8 Kurvendiskussion

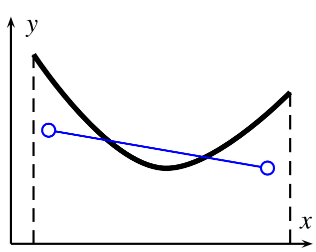
Notwendigkeit für lokales Extrem:

1. Ableitung verschwindet: $f'(x) = 0$
2. Ableitung existiert nicht (z.B. am Rand)

kleinstes lokales Minimum = globales Minimum
grösstes lokales maximum = globales Maximum

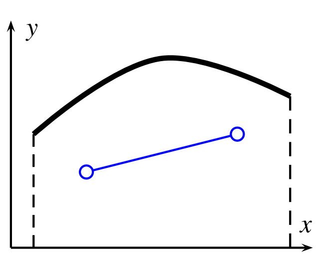
Konkav, wenn

- $f'' > 0$
- f' von neg. nach pos. übergeht



Konvex, wenn

- $f'' < 0$
- f' von pos. nach neg. übergeht



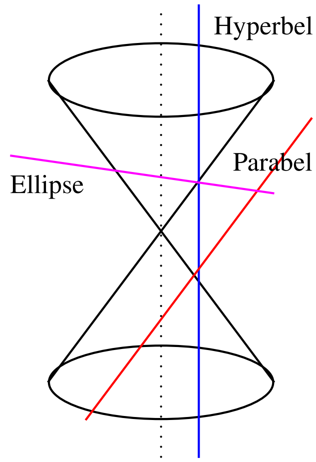
Wendepunkt, wenn $f'' = 0$.

3.9 Harmonische Bewegung

$$\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = 0 \tag{3.104}$$

$$x_t = A \cdot \cos(B \cdot t) + C \cdot \sin(D \cdot t) \tag{3.105}$$

3.10 Kegelschnitte



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \text{Ellipse} \tag{3.106}$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \text{Hyperbel} \tag{3.107}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \text{Kreis} \tag{3.108}$$

3.11 Hessesche Normalform: Abstand Punkt-Gerade

Hessesche Normalform:

$$Ax + By + C = 0 \tag{3.109}$$

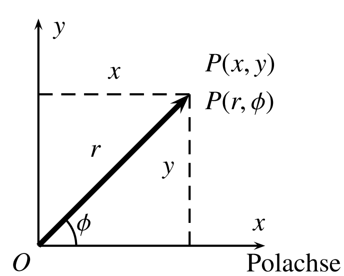
Abstand:

$$\left| \frac{A \cdot x_p + B \cdot y_p + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| \tag{3.110}$$

3.12 Polarkoordinaten

Darstellung ist eindeutig wenn:

$$r \geq 0 \qquad \text{und} \qquad \phi \in [0, 2\pi) \tag{3.111}$$



3.12.1 Transformationsgleichungen

$$x = r \cdot \cos\phi \tag{3.112}$$

$$y = r \cdot \sin\phi \tag{3.113}$$

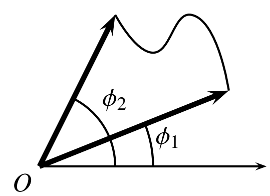
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{3.114}$$

$$\phi = \arctan\frac{y}{x} \qquad \text{nicht eindeutig bestimmt!} \tag{3.115}$$

3.12.2 Beispiele von Kurven

- Kreis um Ursprung: r ist konstant
- Greade durch Ursprung: ϕ ist konstant
- beliebige Greade: $y = m \cdot x + q \quad \Rightarrow \quad r \cdot \sin\phi = m \cdot r \cdot \cos\phi + q$

3.13 Flächeninhalt in Polarkoordinaten



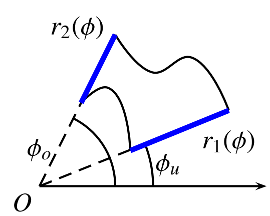
∂F mit einem Kresissektor approximiert:

$$\partial F = \frac{r_\phi + r_{\phi+\partial\phi}}{2} \cdot (r \cdot \phi)\frac{1}{2} \tag{3.116}$$

$$\Longrightarrow \partial F = \left(\frac{r_\phi + r_{\phi+\partial\phi}}{2}\right)^2 \frac{1}{2}\partial\phi \tag{3.117}$$

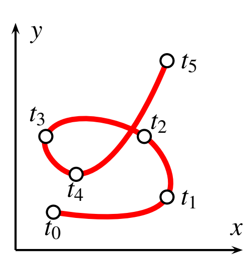
$$\Longrightarrow F = \frac{1}{2}\int_{\phi_u}^{\phi_o} r_\phi^2 \partial\phi \tag{3.118}$$

3.13.1 Verallgemeinerung



$$F = \frac{1}{2}\int_{\phi_u}^{\phi_o} \left(r_1^2 - r_2^2\right)\partial\phi \tag{3.119}$$

3.14 Parametrische Kurven



Zwei von t abhängige Kurven $\Longrightarrow$ Parameter eliminieren. Illustration:

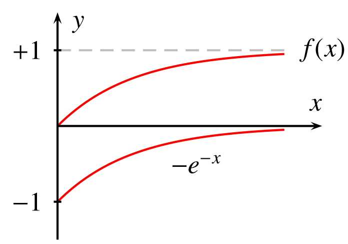
$$x = \cos t$$
$$y = \sin t$$
$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

3.14.1 Tangente

$$m_t = \frac{\dot{y}_t}{\dot{x}_t} \tag{3.120}$$

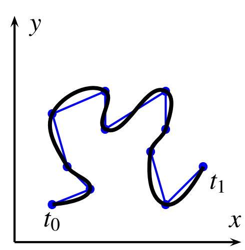
3.15 Axiom der kleinsten/grössten Schranke

$$f_{(x)} = 1 - e^{-x} \qquad \text{für} \quad x > 0 \tag{3.121}$$



$f_{(x)}$ schmiegt sich um $y = 1$ bleibt aber **immer** darunter ($y < 1$). 1 ist die kleinste obere Schranke für $f_{(x)}$.

3.16 Bogenlänge



Approximation des Streckenzugs zwischen t_0 und t_1.
Grenzübergang $\Delta t \to \partial t$

$$\Longrightarrow \qquad L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\, dt \tag{3.122}$$

$$\Longrightarrow \qquad L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(f'_{(x)}\right)^2}\, dx \tag{3.123}$$

3.16.1 Polarkoordinaten

$$x = r_{(\phi)} \cdot \cos\phi \tag{3.124}$$
$$y = r_{(\phi)} \cdot \sin\phi \tag{3.125}$$

$$\Longrightarrow \qquad L = \int_{\phi_0}^{\phi_1} \sqrt{(r')^2 + r^2}\, d\phi \qquad \text{wobei} \quad r' = \frac{\partial r}{\partial \phi} \tag{3.126}$$

3.17 Folgen

$$\{a_k\} \mathrel{\widehat{=}} \quad a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \tag{3.127}$$
$$\{a_k\} \mathrel{\widehat{=}} \quad a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{3.128}$$

Beispiele: $a_k = \frac{1}{k}, a_k = \sqrt{k}$

3.17.1 Einzwänungungssatz für Folgen:

$$a_k < b_k < c_k \tag{3.129}$$

mit

$$\lim_{k\to\infty} a_k = a \qquad \text{und } a = c \lim_{k\to\infty} c_k = c \tag{3.130}$$

$$\Longrightarrow \qquad \lim_{k\to\infty} b_k = b \tag{3.131}$$

3.17.2 Satz:

Es sei $\{x_k\}$ eine konvergente Folge mit $\lim_{k\to\infty} x_k = a$ stetig in a, dann gilt:

$$\lim_{k\to\infty} f_{(x_k)} = f_{(a)} \tag{3.132}$$

3.18 Reihen

Folge $\{a_k\} \longmapsto \{S_n\}$ Reihe, Folge von Partialsummen wenn $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

$$\text{konvergent:} \qquad \lim_{n\to\infty} s_n < \infty \tag{3.133}$$

$$\text{divergent:} \qquad \lim_{n\to\infty} s_n \pm \infty \tag{3.134}$$

3.18.1 Reihenentwicklung verschiedener Funktionen

$$\sin x = x - \frac{1}{x!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 \pm \cdots \tag{3.135}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 \pm \cdots \tag{3.136}$$

$$\exp x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots \tag{3.137}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot x^k \tag{3.138}$$

3.18.2 Geometrische Reihe

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n \tag{3.139}$$

$$- \quad q \cdot s_n = q + q^2 + \cdots + q^n + q^{n+1} \tag{3.140}$$

$$\Longrightarrow s_n - q \cdot s_n = 1 - q^{n+1} \tag{3.141}$$

$$\Longrightarrow s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \tag{3.142}$$

Grenzwert $n \to \infty$

$$|q| < 1 \qquad \text{konvergent} \quad S = \frac{1}{1-q} \tag{3.143}$$

$$|q| \geq 1 \qquad \text{divergent} \tag{3.144}$$

$\sum a_k$ und $\sum b_k$ konvergent, dann ist auch $\sum(a_k + b_k)$ konvergent, und $\sum(\alpha a_k)$ auch konvergent.

3.18.3 Unbestimmte Ausdrücke

Von der Form $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to x^*} \frac{f_{(x)}}{g_{(x)}} = \lim_{x\to x^*} \frac{f'_{(x)}}{g'_{(x)}} \tag{3.145}$$

wenn $\frac{f_{(x)}}{g_{(x)}}$ ein unbestimmter Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$ ist (Regel von **l'Hospital**).

Von der Form $\frac{\infty}{\infty}$

Beispiel:

$$\lim \frac{x}{\exp x}, \lim \frac{\frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} \tag{3.146}$$

Lösung: gleiche Regel von l'Hospital

Uneigentliche Integrale

Beispiel:

$$\int_0^\infty \exp -x \, dx \tag{3.147}$$

Uneigentliches Integral: $I = \int\limits_a^b f_{(x)} \, dx$ für ($a \to -\infty$) oder ($b \to +\infty$) oder ($a \to -\infty$ und $b \to +\infty$).

Wenn der Grenzwert existiert, nennt man das Integral *konvergent*, sonst *divergent*. Das Verhalten ist also abhängig von $f_{(x)}$.

Integrale von Funktionen mit einer Unendlichkeitsstelle Beispiel:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{|x|}} \, dx \tag{3.148}$$

Allgemein:

$$I = \int_a^b f_{(x)} \, dx \tag{3.149}$$

$$\text{mit} \quad \lim_{x \to b^-} f_{(x)} = \pm\infty \tag{3.150}$$

$$\text{oder} \quad \lim_{x \to a^+} f_{(x)} = \pm\infty \tag{3.151}$$

$$= \lim_{B \to b^-} \int_a^B f_{(x)} \, dx \tag{3.152}$$

$$\text{oder} \quad \lim_{A \to a^+} \int_A^b f_{(x)} \, dx \tag{3.153}$$

Integralkriterium

Ist eine Reihe konvergent oder divergent?
Beispiel: $f_{(x)} = \frac{1}{x^2}$

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{x^i} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \tag{3.154}$$

$$a_k = \frac{1}{k^2} \tag{3.155}$$

Annahme: $s < \infty$

$$s < 1 \cdot a_1 + \int_1^\infty f_{(x)} \, dx \tag{3.156}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} = \lim_{B \to \infty} \int_1^B \frac{1}{x^2} \, dx = \cdots = 1 \tag{3.157}$$

$\Longrightarrow$ Die Reihe ist also konvergent: $s < 2$

Allgemein

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \tag{3.158}$$

s ist konvergent wenn $\int\limits_1^\infty f_{(x)} \, dx < \infty$

s ist divergent wenn $\int_1^\infty f_{(x)} \, dx$ divergiert mit $f_{(x)}$ als allgemeines Glied a_x.

Majorantenkriterium

Majorante: Dominiert die gegebene Reihe $s = \sum a_k$
Beispiel:

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^3 + 1} \qquad ak = \frac{1}{2k^3 + 1} \tag{3.159}$$

Majorante: $b_k = \frac{1}{k^3}$ (dominiert a_k, es ist $a_k < b_k \quad \forall k$). Konsequenz:

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k < \sum_{k=1}^{\infty} b_k \qquad \text{ist konvergent} \tag{3.160}$$

$$\Longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \text{ist auch konvergent} \tag{3.161}$$

Wurzelkriterium

Die Reihe $\sum a_k$ ist konvergent, wenn

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} < 1 \tag{3.162}$$

Die Reihe ist divergent, wenn

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} > 1 \tag{3.163}$$

(mit $a_k > 0$).
Wenn $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = 1$ ist, dann kann keine Aussage gemacht werden, d.h. ein anderes Kriterium muss verwendet werden.

Quotientenkriterium

Die Reihe ist konvergent wenn

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1 \tag{3.164}$$

und divergent wenn

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 \tag{3.165}$$

mit $a_k > 0 \quad \forall k$
Wenn $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = 1$ ist, dann kann keine Aussage gemacht werden, d.h. ein anderes Kriterium muss verwendet werden.

3.18.4 Absolute- und bedingte Konvergenz

Absolut konvergente Reihen sind jene, für die $\sum |a_k|$ konvergiert.
Wenn $\sum |a_k|$ konvergent ist, ist auch $\sum a_k$ konvergent.
Wenn $\sum a_k$ konvergiert aber $\sum |a_k|$ nicht konvergiert, dann ist die Reihe bedingt konvergent.

3.18.5 Alternierende Reihen

$(-1)^k \cdot a_k$ ergibt die alternierende Reihe

$$\sum (-1)^k a_k \tag{3.166}$$

Sie ist konvergent wenn

1. a_k monoton fallend ist.

2. $\{a_k\}$ konvergent gegen Null ist (**Leibnizkriterium**).

3.18.6 Taylorpolynome und Taylorreihen in x

(Brook Taylor, 1685-1731)

Hat eine Funktion auf dem Intervall $I = [0, x]$ $\quad n + 1$ stetige Ableitungen, dann gilt:

$$f_{(x)} = f_{(0)} + \frac{f'_{(0)}}{1!}x^1 + \frac{f''_{(0)}}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}_{(0)}}{n!}x^n + R_{n+1(x)} \tag{3.167}$$

$$R_{n+1(x)} = \frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}_{(t)}(x-t)^n\,dt \qquad \hat{=} \quad \text{Restglied} \tag{3.168}$$

$$R_{n+1(x)} = \frac{f^{(n+1)}_{(\xi)}}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad \text{mit} \quad \xi \in (0, x) \quad \text{oder} \quad \xi \in (0, n) \tag{3.169}$$

$T_{n(x)}$: Taylorpolynom n-ten Grades in x

Kann die Taylorreihe für eine Funktion nicht um den Nullpunkt entwickelt werden, dann:

$$f_{(x)} = \ln x \qquad 0 \notin \mathbb{D}_f \qquad \Longrightarrow \qquad \ln x + 1 \tag{3.170}$$

3.18.7 Taylorpolynom mehrdimensional

$$f_{(x,y)} = f_{(x_0,y_0)} + \begin{pmatrix} f_{x(x_0,y_0)} \\ f_{y(x_0,y_0)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \qquad \text{höhere Terme} \tag{3.171}$$

$$\begin{aligned} f_{(x,y)} = f_{(x_0,y_0)} + \frac{f_{x(x_0,y_0)}(x-x_0) + f_{y(x_0,y_0)}(y-y_0)}{1!} + \\ + \frac{f_{xx}(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(y-y_0)^2}{2!} + \cdots \end{aligned} \tag{3.172}$$

$$f_{(\vec{x})} = f_{(\vec{x_0})} + \frac{\nabla f_{(\vec{x_0})}}{1!}(\vec{x} - \vec{x_0}) + \cdots \tag{3.173}$$

3.18.8 Taylorpolynom und Taylorreihe in $x - a$

Funktion $f_{(x)}$ an der Stelle $a \hat{=} f_{(a)}$. Es wird nun eine Variablentransformation gemacht:

$$u = x - a \tag{3.174}$$

$$f_{(x)} \longmapsto g_{(u)} \tag{3.175}$$

Taylorpolynom für $g_{(u)}$ um den Nullpunkt:

$$g_{(u)} = T_{n(u)} + R_{n+1(u)} \tag{3.176}$$

Rücktransformation:

$$u = x - a \tag{3.177}$$

$$T_{n(u)} \quad \Longrightarrow \quad T_{n(x)} \tag{3.178}$$

$$R_{n+1(u)} \quad \Longrightarrow \quad R_{n+1(x)} \tag{3.179}$$

$$T_{n(x)} = \frac{f_{(a)}}{0!}(x-a)^0 + \cdots + \frac{f^{(n)}_{(a)}}{n!}(x-a)^n \tag{3.180}$$

$$R_{n+1(x)} = \frac{f^{(n+1)}_{(\xi)}}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{mit} \quad \xi \in (a, x) \quad \text{oder} \quad \xi \in (x, a) \tag{3.181}$$

3.18.9 Potenzreihen

Vergleich: Taylorreihe vs. Potenzreihe Taylorreihe:

$$f_{(x_0)} = \frac{f_{(x_0)}}{0!}(x-x_0)^0 + \frac{f'_{(x_0)}}{1!}(x-x_0)^1 + \cdots \tag{3.182}$$

Potenzreihe:

$$a_0(x-x_0)^0 + a_1(x-x_0)^1 + a_2(x-x_0)^2 + \cdots \tag{3.183}$$

Satz Ist die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$ für ein x_1 konvergent, dann ist sie für $|x| < |x_1|$ konvergent (absolute Konvergenz).

$$\Longrightarrow \qquad \text{Konvergenzradius}$$

Analyse der Konvergenz mittels:

- Quotientenkriterium
- Wurzelkriterium
- Integralkriterium (Marjoranten)
- Leibniz (alternierende Reihen)

Satz Konvergente Potenzreihen können Gliedweise differenziert und integriert werden.
Beispiel:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^{\infty} \frac{\frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots}{x}\, dx \tag{3.184}$$

3.19 Konvergenzradius

3.19.1 Quotientenkriterium

Kriterium:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| < 1 \tag{3.185}$$

Konvergenzradius:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \tag{3.186}$$

3.19.2 Wurzelkriterium

Kriterium:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} < 1 \tag{3.187}$$

Konvergenzradius:

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{3.188}$$

Achtung: Analyse gilt im Interval $(-|x|, +|x|)$. Analyse für die Werte $\pm|x|$ muss separat durchgeführt werden.

3.20 Binominalreihen

$$(1+x)^{\alpha} = \binom{\alpha}{0} \cdot x^0 + \binom{\alpha}{1} \cdot x^1 + \binom{\alpha}{2} \cdot x^2 + \cdots \tag{3.189}$$

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots[a-(k-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \tag{3.190}$$

3.21 Krümmungskreis

Definition:

$$\kappa = \frac{\partial \phi}{\partial s} \tag{3.191}$$

$$\kappa = \frac{y''}{\left[1 + (y')^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\dot{x} \cdot \ddot{y} - \ddot{x} \cdot \dot{y}}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{3.192}$$

Der Mittelpunkt liegt auf der Senkrechten zur Berührungstangente.
Radius des Krümmungskreises:

$$\rho = \frac{1}{|\kappa|} \tag{3.193}$$

3.22 Funktionen mehrerer Variablen

Funktion welche mehrere Variablen als Unabhängige besitzt:

$$f(x_1, x_2, x_3) \tag{3.194}$$
$$f(x_i) \tag{3.195}$$
$$f : (x, y, z) \longmapsto \cdots \tag{3.196}$$

oder als Fläche 2. Ordnung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A & \frac{D}{2} & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & B & \frac{F}{2} \\ \frac{E}{2} & \frac{F}{2} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \tag{3.197}$$

3.22.1 Höhenlinien, Niveauflächen

$$w = f(x, y, z) = A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D \tag{3.198}$$

ist der Ort, an welchem das gleiche Niveau herrscht (w ist konstant, x, y, z variabel), und das überall.

3.23 Partielle Ableitungen

Schreibweise:

$$f(x, y) \tag{3.199}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} \hat{=} \quad \text{partielle Ableitung nach} \quad x \tag{3.200}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} \hat{=} \quad \text{partielle Ableitung nach} \quad y \tag{3.201}$$
$$\tag{3.202}$$

Wird nach einer Variablen partiell differenziert, so sind die andern Variablen als konstant aufzufassen.

Partielle Ableitungen sind Grenzwerte:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \tag{3.203}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \tag{3.204}$$
$$\tag{3.205}$$

3.23.1 Stetigkeit

Eine stetige Funktion mehrerer Variablen ist in jeder Variablen für sich stetig.

3.23.2 Satz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \tag{3.206}$$
$$f_{xy} = f_{yx} \tag{3.207}$$

gilt wenn:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad \text{stetig sind.} \tag{3.208}$$

3.24 Gradient

Der Gradient ist die Richtung des steilsten Anstiegs.

$$\text{sei} \quad f : (x, y) \longmapsto f(x, y) \tag{3.209}$$

$$\text{grad}(f) = \nabla f = \overrightarrow{x}' = (x', y') \tag{3.210}$$

∇ : Nabla-Operator, partielle Ableitung nach jeder Variablen.

3.24.1 Satz

$$\nabla(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = \alpha \cdot \nabla f + \beta \cdot \nabla g \tag{3.211}$$

3.25 Richtungsableitung

Die Richtungsableitung entspricht dem Tangens des Steigungswinkels der Tangente, deren Projektion auf den Grundriss mit der vorgegebenen Richtung $\overrightarrow{u}$ zusammenfällt.

3.25.1 Satz

$$f'_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{x}) = \nabla f \circ \overrightarrow{u} \qquad \text{mit} \|\overrightarrow{u}\| = 1 \tag{3.212}$$

3.25.2 Satz

Für 2 bliebige Punkte A und B einer zusammenhängenden Menge gibt es einen verbindenden Polygonzug.

3.25.3 Satz

$$\nabla f = \overrightarrow{0} \qquad \Longrightarrow f \qquad \text{konstant} \tag{3.213}$$

3.25.4 Satz

$$\nabla f = \nabla g \qquad \Longrightarrow f \quad \text{und} \quad g \quad \text{unterscheiden sich nur durch eine Konstante} \tag{3.214}$$

3.25.5 Zwischenwertsatz

f stetig auf zusammenhängender Menge, dann wird falls $f(\overrightarrow{a}) = a$, $f(\overrightarrow{b}) = b$ jeden Wert zwischen a und b angenommen. c liegt zwischen a und b. Daraus folgt:

$$\exists \overrightarrow{c} \qquad \text{so dass} \qquad f(\overrightarrow{c}) = c \tag{3.215}$$

3.26 Ableitung entlang einer Kurve

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\overrightarrow{r}_{(t)}) = \nabla f(\overrightarrow{r}_{(t)}) \circ \dot{\overrightarrow{r}}_{(t)} \tag{3.216}$$

3.26.1 Satz

$$u_{(x,y)} = u\left(x_{(s,t)}, y_{(s,t)}\right) \tag{3.217}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \tag{3.218}$$

3.27 Maxima und Minima

Mehrdimensional: in dem max. bzw. min. Stellen ist die Tangentialebene horizontal:

$$\nabla f \perp \quad \text{auf Grundriss} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \nabla f = \underline{0} \tag{3.219}$$

Sattel: horizontale Tangentialfläche aber keine lokales Maximun oder Minimum.
Komponentenschreibweise der Tangentialfläche:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{3.220}$$

$B^2 - A \cdot C$

- > 0 : Sattelpunkt
- < 0
  - $A > 0$: lok. Min.
  - $A < 0$: lok. Max.

3.28 Lagrange-Funktion

Extremwerte mit Nebenbedingungen.

$$\begin{array}{ll} g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 & \text{1. Nebenbedingung} \\ g_2(x_1, \ldots, x_n) = 0 & \text{2. Nebenbedingung} \\ \vdots & \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) = 0 & \text{m. Nebenbedingung} \\ f(x_1, \ldots, x_n) & \text{zu min. oder max. Funktion} \end{array}$$

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i + g_i(x_1, \ldots, x_n) \tag{3.221}$$

3.29 Differentiale

Eindimensional:

$$df = f'(x)dx \tag{3.222}$$

Zweidimensional:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{3.223}$$

Dreidimensional:

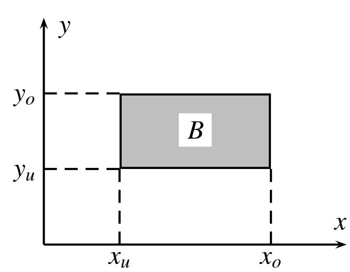
$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \tag{3.224}$$

3.30 Integrale

3.30.1 Doppelintegrale

$$I = \iint\limits_{\mathbb{B}} f(x, y)\, dx\, dy \tag{3.225}$$

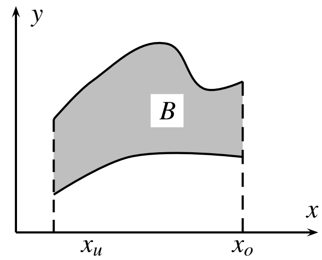
Doppelintegral über Rechteck:



$$I = \iint\limits_{\mathbb{B}} f(x,y)\,dx\,dy \tag{3.226}$$

$$I = \int_{x=x_u}^{x_o} \left(\int_{y=y_u}^{y_o} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{y=y_u}^{y_o} \left(\int_{x=x_u}^{x_o} f(x,y)\,dx \right) dy \tag{3.227}$$

Doppelintegral über beliebigem Bereich:



$$I = \int_{x=x_u}^{x_0} \left(\int_{y=h(x)}^{g(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \tag{3.228}$$

Die Grenzen des inneren Integrals sind Funktionen des äusseren Integrals.

Liegt ein allgemeiner Integrationsbereich vor, welcher nicht klare Grenzen in einer Achse bietet, so muss der Bereich unterteilt werden (sinnvolle Unterteilung!).

Das Koordinatensystem muss nicht unbedingt *kartesisch* sein. Polarkoordinaten erweisen sich als sehr nützlich $\longrightarrow$ sie vereinfachen die Rechnung teilweise erheblich! Beispiel: Volumen eines Kreiskegels.

Anwendungen:

- Massenberechnung: $M = \iint\limits_{\mathbb{B}} \rho(x,y)\,dx\,dy$
- Schwerpunkt: $x_s \cdot M = \iint\limits_{\mathbb{B}} x \cdot \rho(x,y)\,dx\,dy \qquad y_s \cdot M = \iint\limits_{\mathbb{B}} y \cdot \rho(x,y)\,dx\,dy$

3.30.2 Dreifachintegrale

$$I = \iiint\limits_{\mathbb{V}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \tag{3.229}$$

$$I = \int_x \left(\int_y \left(\int_z f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx \tag{3.230}$$

Die Reihenfolge der Integrale hängt von den Integrationsgrenzen ab, sie kann aber im Prinzip frei gewählt werden. Tipp: einfachste Reihenfolge wählen, sowohl bezüglich Grenzen als auch den Integralen.

3.30.3 Mehrfachintegrale

Variablensubstitution

$$I = \iint\limits_{\mathbb{B}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\mathbb{B}} f\left(x(u,v), y(u,v)\right) \cdot |D|\,du\,dv \tag{3.231}$$

D ist die Funktionaldeterminante oder *Jacobi-Determinate*:

$$D = \left| \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \right|$$

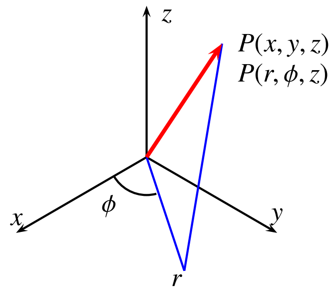
Koordinatentransformation 2D

Cartesische Koordinaten: $x, y \quad \longrightarrow \quad$ Polare Koordinaten: r, ϕ

$$x = r \cdot \cos(\phi)$$
$$y = r \cdot \sin(\phi)$$
$$D = r$$

Hier wird die Funktionaldeterminante entsprechend komplizierter (3x3 Matrix):

$$D = \det \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix}$$



Cartesische Koordinaten: $x, y, z \quad \longrightarrow \quad$ Zylindrische Koordinaten: r, ϕ, z

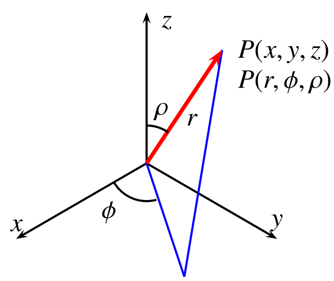
$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos(\phi) \\ y &= r \cdot \sin(\phi) \\ z &= z \\ \Longrightarrow \quad |D| &= r \end{aligned}$$

Cartesische Koordinaten: $x, y, z \quad \longrightarrow \quad$ Kugel- oder Sphärische Koordinaten: r, ϕ, ρ

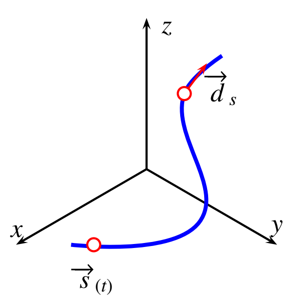
$$\begin{aligned} x &= r \cdot \sin(\rho) \cdot \cos(\phi) \\ y &= r \cdot \sin(\rho) \cdot \sin(\phi) \\ z &= r \cdot \cos(\rho) \end{aligned}$$

mit

$$0 \leq \rho \leq \pi \qquad \text{und} \qquad 0 \leq \phi \leq \pi$$
$$\Longrightarrow \qquad D = -r^2 \cdot \sin(\rho)$$



3.30.4 Kurvenintegrale



$$\overrightarrow{ds} = \dot{\overrightarrow{s}} \cdot dt \tag{3.232}$$

$$E = \oint dE = \oint \overrightarrow{k} \circ \overrightarrow{ds} = \int_{t_0}^{t_1} \left(\overrightarrow{k}_{(\overrightarrow{s}_{(t)})} \circ \dot{\overrightarrow{s}}_{(t)} \right) dt \tag{3.233}$$

Hauptsatz für Kurvenintegrale

Entspricht das Kraftfeld $\overrightarrow{k}$ dem Gradientenfeld, dann ist das Wegintegral zwischen zwei Punkten vom Weg unabhängig.

3.31 Differentialgleichungen (DGL)

3.31.1 Definition

Gewöhnliche Differengialgleichungen (DGL):

$$F\left(y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x), x\right) = 0 \tag{3.234}$$

entspricht einer Gleichung mit einer unabhängigen Variablen. Beispiel: $y'' + 5x = 0$

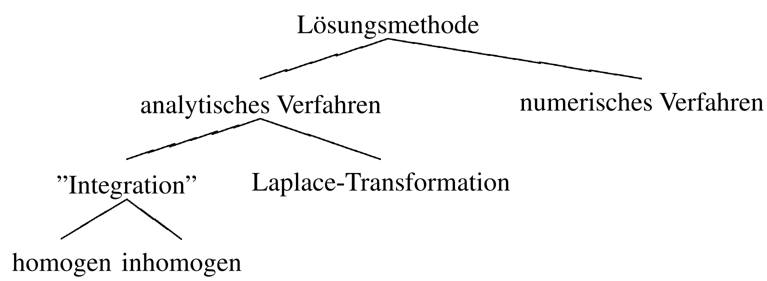
Definition: Die Ordnung der DGL entspricht der höchsten vorkommenden Ableitung.

Definition: Lineare DGL: y und deren Ableitungen treten ausschliesslich in der 1. Potenz auf.

Definition: Die Lösung der DGL ist eine Funktion welche die DGL erfüllt.

Die Konstanten sind Integrationskonstanten und werden mit Hilfe der Anfangs- und Randbedingungen bestimmt.

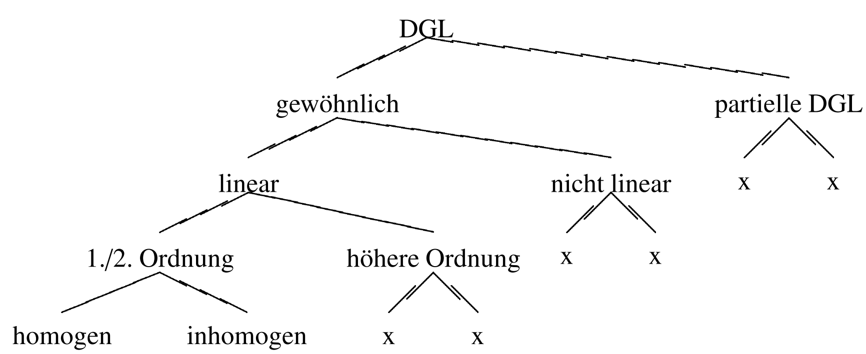
Definition: die Lösungsmethode ist ein Verfahren zur Gewinnung einer Lösung. Übersicht:



homogen: direkt, Separation, Substitution oder Ansatz

inhomogen: Ansatz, Variation der Konstanten, Reihenansatz

Lösungsmethoden sind nicht generell anwendbar, sondern vom Typ der DGL abhängig:



Dieser Baum ist symmetrisch aufgebaut, d.h. jeder mit 'x' gekennzeichnte Teilbaum hat die gleiche Struktur.

3.31.2 Fundamentalsatz

Die allgemeine Lösung einer linearen DGL ergit sich durch Addition der allgemeinen Lösung, der homogenen Lösung und einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL (spezielle oder partikuläre Lösung).

3.31.3 Satz:

Die homogene Lösung einer DGL n-ter Ordnung besteht aus n linear unabhängigen Komponenten.

3.31.4 Definition

n Funktionen $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ sind linear unabhängig, wenn es n Konstanten $c_1, \ldots, c_n$ gibt, mit $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n = 0$ für mindestens ein x, wobei nicht alle $c_i = 0$!

3.31.5 Satz:

Die Funktionen $y_1(x), \dots, y_n(x)$ seien differenzierbar. Sie sind linear unabhängig $\Longleftrightarrow$ Wronski-Determinante $\neq 0$.

3.31.6 Definition: Wronksi-Determinante

$$W(y_1, \dots, y_n) = \det \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \tag{3.235}$$

3.31.7 DGL mit separierbaren Variablen

Definition

separierbare DGL (1. Ordnung) $\widehat{=}$ $\quad y' = f(x) \cdot g(y)$
Allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{y'}{g(y)} &= f(x) \\ \Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{g(y)} &= \int f(x)\,dx \\ \Longrightarrow \quad G(y) = F(x) \quad &\longrightarrow \quad \text{Auflösung nach} \quad y \end{aligned}$$

Regel:

1. Trennung der Variablen, d.h.: $G(y)\,dy = F(x)\,dx$
2. Integration
3. Auflösung nach y

3.31.8 DGL vom Typ $y' = f(ax + by + c)$

Kann durch Substitution $u = ax + by + c$ auf eine separierbare Form gebracht werden:

$$y' = f(ax + by + c)$$

Substituion:

$$u = ax + by + c \quad \Longrightarrow \quad u' = a + by'$$

dann ist

$$\begin{aligned} u' &= a + b \cdot f(u) \\ \frac{du}{dx} &= a + b \cdot f(u) \\ \int \frac{du}{a + b \cdot f(u)} &= \int dx = \boxed{\boldsymbol{x + c}} \end{aligned}$$

Regel:

1. Substitution $u = ax + by + c$
2. DGL in u bzw. u' formulieren
3. DGL lösen (separierbar)
4. Substitution auflösen und y bestimmen

3.31.9 DGL vom Typ $y' = \frac{y}{x}$

Regel:

1. Wahl der Substitution $u = \frac{y}{x}$
2. DGL in u bzw. u' formulieren
3. DGL lösen (separierbar)
4. Substitution auflösen und y bestimmen

3.31.10 Lineare DGL 1. Ordnung

Allgemein

$$y' = y \cdot g(x) + h(x)$$

1. Lösung der homogenen DGL: $y' - y \cdot g(x) = 0$ ist separierbar $\Longrightarrow \quad y_h = \ldots$
2. Lösung der inhomogenen DGL: $y' - y \cdot g(x) = h(x)$
   (a) Variation der Konstanten
   (b) Ansatz vom Typ der Störfunktion

   $\Longrightarrow \quad y_{ih} = \ldots$
3. $y = y_h + y_{ih}$
   Bestimmung der Konstanten mit Hilfe der Anfangs- oder Randbedingungen

Variation der Konstanten

$$y' = y + \sin(x) \qquad y(0) = 1$$

homogen:

$$y_h = c \cdot e^x$$

inhomogen:

$$\text{Ansatz:} \quad y_{ih} = k(x) \cdot e^x$$
$$y' = k' \cdot e^x + k \cdot e^x$$

eingesetzt:

$$\begin{aligned} k' \cdot e^x + k \cdot e^x &= k \cdot e^x + \sin(x) \\ k' &= e^{-x} \cdot \sin(x) \\ k(x) &= \int e^{-x} \cdot \sin(x)\, dx \\ &= \frac{e^{-x}}{2} (-\sin(x) - \cos(x)) + c \\ \Longrightarrow \quad y_{ih} = k(x) \cdot e^x &= \frac{1}{2} [-\sin(x) - \cos(x)] + c \cdot e^x \end{aligned}$$

Ansatz vom Typ der Störfunktion

Funktioniert wie bei den Differenzgleichungen. Ansätze für Störfunktionen:

Störfunktion	Ansatz
β^t	$A \cdot \beta^t$
$\sin(\alpha t)$	$A \cdot \cos(\alpha t) + B \cdot \sin(\alpha t)$
$\cos(\alpha t)$	$A \cdot \cos(\alpha t) + B \cdot \sin(\alpha t)$
Polynom $P_m(t)$	$A_0 \cdot t^m + A_1 \cdot t^{m-1} + \cdots + A_m$
$\beta^t \cdot P_m(t)$	$\beta^t \cdot \left(A_0 \cdot t^m + A_1 \cdot t^{m-1} + \cdots + A_m\right)$
$\beta^t \cdot \sin(\alpha t)$	$\beta^t \cdot (A \cdot \cos(\alpha t) + B \cdot \sin(\alpha t))$
$\beta^t \cdot \cos(\alpha t)$	$\beta^t \cdot (A \cdot \cos(\alpha t) + B \cdot \sin(\alpha t))$

3.31.11 DGL höherer Ordnung

Allgemeine DGL 2. Ordnung:

$$a(x) \cdot y'' + b(x) \cdot y' + c(x) \cdot y = y(x) \tag{3.236}$$

homogene DGL: **nicht separierbar!** $\longrightarrow$ charakteristisches Polynom
Ansatz: $y_h = c \cdot e^x$, bei doppelten Nullstellen: $y_h = c \cdot x \cdot e^x$, bei dreifachen Nullstellen: $y_h = c \cdot n^2 \cdot e^x$

Beispiel: $y'' - 8y' + 16y = 0$ (Nullstellen: 4, 4)

$$\implies \quad y_h = c_1 \cdot e^{4x} + c_2 \cdot x \cdot e^{4x}$$

Beispiel: Nullstellen: $-2 \pm 3j$

$$\begin{aligned} & y_h = c_1 \cdot e^{-2x} \cdot e^{3j} + c_2 \cdot e^{-2x} \cdot e^{-3j} \\ \implies \quad & y_h = c_1 \cdot e^{-2x} \cos(3x) + c_2 \cdot e^{-2x} \cdot \sin(3x) \end{aligned}$$

3.31.12 DGL-Systeme

Jede lineare DGL höherer Ordnung lässt sich auf ein DGL-System 1. Ordnung zurückführen (und umgekehrt).
Beispiel: $y^{(4)} - 16 \cdot y = e^x$

$$\begin{aligned} z_1(x) &= y(x) \\ z_2(x) &= y' \\ &\vdots \\ z_5(x) &= y^{(4)} \\ \implies \quad z_4' - 16 \cdot z_1 &= e^x \end{aligned}$$

$$\dot{\vec{z}} = \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 16 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^x \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{z}} = A \cdot \vec{z} + \vec{g}$$

3.32 Laplace-Transformation

3.32.1 Definition

$$f(t) \longmapsto \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-s \cdot t}\, dt = F(s) \tag{3.237}$$

Laplace-Transformation oder Integral-Transformation
$f(t) \quad \widehat{=} \quad$ Zeitfunktion $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^+$
$F(s) \quad \widehat{=} \quad$ Laplace-Transformierte von f

<u>Kurzschreibweise:</u>

$$\begin{aligned} f(t) &\quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad F(s) \\ &\quad\;\; \mathscr{L} \\ f &\quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad F \\ F(s) &\quad = \quad \mathscr{L}(f(t)) \end{aligned}$$

Satz

Jede stetige auf $[0, \infty)$ definierte Zeitfunktion $f(t)$, die durch eine Exponentialfunktion begrenzt ist, kann transformiert werden.

Satz

$$\lim_{s \to \infty} F(s) = 0 \tag{3.238}$$

3.32.2 Eigenschaften

Linearität

$$\mathscr{L}\left(c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t)\right) = c_1 \cdot F_1(s) + c_2 \cdot F_2(s) \tag{3.239}$$

Variablentransformation

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F(s) \quad \Longleftrightarrow \quad f(a \cdot t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right) \quad \text{für} \quad a > 0 \tag{3.240}$$

Verschiebungssatz im Bildbereich:

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F(s) \quad \Longleftrightarrow \quad e^{a \cdot t} \cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F(s-a) \tag{3.241}$$

Verschiebungssatz im Zeitbereich:

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F(s) \quad \Longleftrightarrow \quad f(t-a) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet e^{-s \cdot a} \cdot F(s) \quad \text{für} \quad a > 0 \tag{3.242}$$

Differentiation im Zeitbereich

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F(s) \quad \Leftrightarrow \quad f'(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet s \cdot F(s) - f(f) \tag{3.243}$$

$$f \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F \quad \Leftrightarrow \quad f^{(n)} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet s^n \cdot F(s) - s^{n-1} \cdot f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \tag{3.244}$$

Integration im Zeitbereich

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F(s) \quad \Longleftrightarrow \quad \int_0^t f(\tau)\, d\tau \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s} F(s) \tag{3.245}$$

$$t^n \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{s^{n+1}} \tag{3.246}$$

Differentiation im Bildbereich

$$F(s) \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ f(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d^n}{ds^n} F(s) \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ (-1)^n \cdot t^n \cdot f(t) \tag{3.247}$$

Integration im Bildbereich

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F(s) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{t} f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \int_s^\infty F(u)\,du \tag{3.248}$$

Periodische Funktionen

$f(t)$ in T periodisch.

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F(s) = \int_0^T e^{-s\cdot\tau} \cdot f(\tau)\,d\tau \cdot \frac{1}{1 - e^{-s\cdot T}} \tag{3.249}$$

Grenzwerte

$$f(0) = \lim_{s\to\infty} s \cdot F(s) \qquad f(\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot F(s) \tag{3.250}$$

Faltung

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(u) \cdot g(t-u)\,du \tag{3.251}$$

$$f(t) * g(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F(s) \cdot G(s) \tag{3.252}$$

3.32.3 Rationale Bildfunktionen

$$F(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \qquad \text{Grad Zähler ¡ Grad Nenner} \tag{3.253}$$

Rücktransformation

$$\frac{Q(s)}{P(s)} = F(s) \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ f(t)$$

Annahme: $P(s)$ hat einfache Nullstellen s_i

$$\Longrightarrow \quad F(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2} + \cdots + \frac{A_n}{s-s_n}$$

$$\text{mit} \quad A_i = F(s) \cdot (s - s_i) \quad \text{mit} \quad s = s_i$$

$$\frac{A_i}{s-s_i} \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ A_i \cdot e^{s_i\cdot t} \begin{cases} s_i \text{ ist reell} & \Longrightarrow \quad A_i \cdot e^{s_i \cdot t} \quad \text{ist reell} \\ s_i \text{ komplex;} & s_i = x + j\beta \end{cases}$$

Im komplexen Fall:

$$\frac{A_i}{s-s_i} + \frac{\overline{A_i}}{s-\overline{s_i}} \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ A_i \cdot e^{s_i\cdot t} + \overline{A_i} \cdot e^{\overline{s_i}\cdot t}$$
$$= c_i \cdot e^{\alpha\cdot t} \cdot \cos(\beta \cdot t) + c_2 \cdot e^{\alpha\cdot t} \cdot \sin(\beta \cdot t)$$

3.32.4 Lösen einer DGL

1. Laplate-Transformation der DGL in eine gewöhnliche Gleichung
2. Lösen der Gleichung
3. Rücktransformation mit Erhalt der Lösung der DGL

3.32.5 Lineare DGL mit variablen Koeffizienten

Allgemeine Form:

$$A(t) \cdot y^{(m)}(t) + B(t) \cdot y^{(m-1)}(t) + \cdots + N(t) \cdot y(t) = g(t) \tag{3.254}$$

Herleitung allgemeiner Term:

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\!\bullet F(s)$$

Differentiation im Bildbereich:

$$(-1)^n \cdot t^n \cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\!\bullet \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

Differentiation im Zeitbereich:

$$\begin{aligned} f^{(k)} &\circ\!\!-\!\!\!\bullet s^k \cdot F(s) - s^{k-1} \cdot f(0) - s^{k-2} \cdot f'(0) - \cdots - f^{(k-1)}(0) \\ \implies \quad (-1)^n \cdot t^n \cdot k^{(k)}(t) &\circ\!\!-\!\!\!\bullet \frac{d^n}{ds^n} \left(s^k \cdot F(s) - s^{k-1} \cdot f(0) - \cdots - f^{(k-1)}(0) \right) \end{aligned}$$

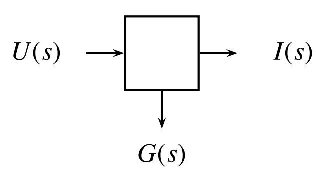
3.32.6 Elektrische Schwingkreise

R	$r \cdot i(t)$	$R \cdot I(s)$
C	$\frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(\tau)\, d\tau$	$\frac{1}{C} \cdot \frac{I(s)}{s}$
L	$L \cdot \frac{di}{dt}$	$L \cdot (s \cdot I(s) - i(0))$
Problem	$u(t) \to \square \to i(t)$	$U(s) \to \square \to I(s)$

Definition: eine Übertragungsfunktion ist jene Funktion, die eine Anregungsfunktion $u(t)$ in eine Antwort $i(t)$ verwandelt.

Definition: eine Übertragung heisst **linear**, wenn im Bildbereich die Antwort aus einer Multiplikation von Anregungs- und Übertragungsfunktion (beide Laplace-Transformiert) berechnet werden kann.

Illustration:

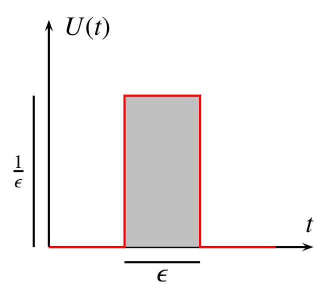


Prinzip von Duhamel:

$$i_{(t)} = \int_o^t g_{(t-\tau)} \cdot u_{(\tau)}\, d\tau \tag{3.255}$$

Behauptung:

$$\mathscr{L}^{-1}(u_{(s)}) = \mathscr{L}^{-1}(1) \hat{=} \text{Einheitsstoss}$$



3.33 Fourier-Reihen

Eine beliebige periodische Funktion lässt sich aus anderen Periodischen zusammensetzen.

3.33.1 Fourier-Reihe

$$f \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} [a_k \cdot \cos(\omega_k \cdot t) + b_k \cdot \sin(\omega_k \cdot t)] \tag{3.256}$$

3.33.2 Wavelets

$$f \longmapsto \sum_{i=0}^{\infty} c_i \cdot y_i \tag{3.257}$$

3.33.3 Skalarprodukt zweier Funktionen

$$\vec{f} \circ \vec{g} = \int_0^{2\pi} f_{(t)} \cdot g_{(t)}\, dt \tag{3.258}$$

$$\text{mit } \vec{t} = \begin{pmatrix} f_{(0)} \\ \vdots \\ f_{(2\pi)} \end{pmatrix} \text{ und } \vec{g} = \begin{pmatrix} g_{(0)} \\ \vdots \\ g_{(2\pi)} \end{pmatrix}$$

3.33.4 Entwicklung einer 2π-per. Funktion in eine Fourier-Reihe

$f_{(t)}$ ist 2π-periodisch. Ansatz:

$$f_{(t)} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cdot \cos(kt) + b_k \cdot \sin(kt)]$$

Skalarmultiplikation mit $cos(0 \cdot t) = 1$:

$$\int_0^{2\pi} f_{(t)} \cdot 1\, dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cdot \cos(kt) + b_k \cdot \sin(kt)] \right) dt$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_{(t)}\, dt \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_{(t)} \cdot \cos(kt)\, dt \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_{(t)} \cdot \sin(kt)\, dt \end{aligned}$$

3.33.5 Entwicklung einer t-per. Funktion in ene Fourier-Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot \cos\left(k \frac{2\pi}{T} \tau\right) + b_k \cdot \sin\left(k \frac{2\pi}{T} \tau\right) \right] \tag{3.259}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^{T} f_{(\tau)}\, d\tau \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_0^{T} f_{(\tau)} \cdot \cos\left(k \frac{2\pi}{T} \tau\right) d\tau \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_0^{T} f_{(\tau)} \cdot \sin\left(k \frac{2\pi}{T} \tau\right) d\tau \end{aligned}$$

3.33.6 Grundfrequenz, Harmonische

$$\text{Grundfrequenz:} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \tag{3.260}$$

$$\text{k-te harmonische Frequenz:} \qquad \omega_k = k \cdot \frac{2\pi}{T} = k \cdot \omega \tag{3.261}$$

$$f_{(t)} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cdot \cos(\omega_k t) + b_k \cdot \sin(\omega_k t)]$$

mit

$$a_k = \frac{2}{T} \int\limits_{(T)} f_{(t)} \cdot \cos(\omega_k t)\, dt \qquad \text{für} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int\limits_{(T)} f_{(t)} \cdot \sin(\omega_k t)\, dt \qquad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots$$

3.33.7 Komplexe Fourier-Reihe

$$f_{(t)} = e^{j\omega_k t} \frac{a_k - jb_k}{2} + e^{-j\omega_k t} \frac{a_k + jb_k}{2} \tag{3.262}$$

$$= e^{j\omega_k t} c_k + e^{-j\omega_k t} c_{-k} \tag{3.263}$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int\limits_{(T)} f_{(t)} \cdot e^{j\omega_k t}\, dt \tag{3.264}$$

$$c_{-k} = \frac{1}{T} \int\limits_{(T)} f_{(t)} \cdot e^{-j\omega_k t}\, dt \tag{3.265}$$

$$\tag{3.266}$$

3.33.8 Fourier-Transformation

$$f_{(t)} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_{(\omega)} \cdot e^{j\omega t}\, d\omega \qquad F_{(\omega)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{(\tau)} \cdot e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

$f_{(t)}$: Zeitfunktion
$F_{(\omega)}$: Spektralfunktion

Variante 1

$$F_{(\omega)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{(t)} \cdot e^{-j\omega t}\, dt \tag{3.267}$$

$$f_{(t)} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_{(\omega)} \cdot e^{j\omega t}\, \omega \tag{3.268}$$

ω : Kreisfrequenz
$f_{(t)}$: Zeitfunktion, Signalfunktion, Signal
$F_{(\omega)}$: Frequenzfunktion, Spektralfunktion

Variante 2

$$H_{(f)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h_{(t)} \cdot e^{-2\pi jft}\, dt \tag{3.269}$$

$$h_{(t)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_{(f)} \cdot e^{-2\pi jft}\, df \tag{3.270}$$

Variante 3

$$F_{(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(t)} \cdot e^{-j\omega t} \, dt \tag{3.271}$$

$$f_{(t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{(\omega)} \cdot e^{-j\omega t} \, d\omega \tag{3.272}$$

3.33.9 Fourier-Integral

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(t)} \cdot e^{j\omega t} \, dt = Re_{(F)} + j \cdot Im_{(F)} = |F| \cdot e^{j\Phi} \tag{3.273}$$

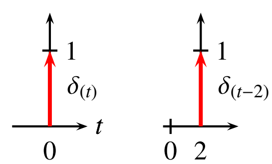
$$\begin{aligned} \omega \mapsto |F| \quad &\hat{=} \quad \text{Amplitudenspektrum} \\ \omega \mapsto \Phi \quad &\hat{=} \quad \text{Phasenspektrum} \end{aligned}$$

3.33.10 Dirac

Definition

Dirac-Funktion oder auch Delta-Funktion:

$$\delta_{(t)} = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & 0 \text{ sonst} \end{cases} \qquad \text{mit} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{(t)} \, dt = 1 \tag{3.274}$$



Alternative Definition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{(t)} \cdot \phi_{(t)} \, dt = \phi_{(u)} \tag{3.275}$$

$$\text{mit } \phi_{(u)} \text{ als sog. Testfunktion } \lim_{t \to \pm\infty} \phi_{(t)} = 0$$

$$\text{es ist } \phi_{(t_0)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{(t-t_0)} \cdot \phi_{(t)} \, dt$$

Eigenschaften

$$f_{(t)} \cdot \delta_{(t)} = f_{(0)} \cdot \delta_{(t)} \tag{3.276}$$

$$t \cdot \delta_{(t)} = 0 \tag{3.277}$$

$$\delta_{(a \cdot t)} = \frac{1}{|a|} \delta_{(t)} \tag{3.278}$$

$$\delta_{(-t)} = \delta_{(t)} \tag{3.279}$$

Differentiation der Dirac-Funktion

→ partielle Integration

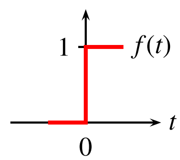
$$\delta'_{(t)} = \frac{\partial}{\partial t}\delta_{(t)} \quad \hat{=} \text{ Distributionsfunktion} \quad \text{Wirkung:} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'_{(t)} \cdot \phi_{(t)}\, dt = -\phi'_{(0)}$$

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\delta_{(t)} = \delta^{(n)}_{(t)} \qquad \text{Wirkung:} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}_{(t)} \cdot \phi_{(t)}\, dt = (-1)^n \cdot \phi^{(n)}_{(0)}$$

Produktregel für Diracfunktion

$$(f_{(t)} \cdot \delta_{(t)})' = f'_{(t)} \cdot \delta_{(t)} + f_{(t)} \cdot \delta'_{(t)} = -f_{(0)} \cdot \phi'_{(0)} \tag{3.280}$$

Heavyside-Funktion



$$f_{(t)} = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.281}$$

$$\delta_{(t)} = \frac{\partial}{\partial t} u_{(t)}$$

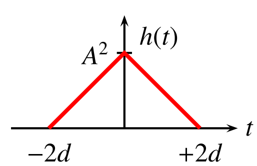
Rechteckimpuls

$$h_{(t)} = \begin{cases} A & |t| < t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.282}$$

$$H_{(f)} = 2Ad \cdot \frac{\sin(2\pi f d)}{2\pi f d} \tag{3.283}$$

Dreiecksimpuls

$$H_{(f)} = \frac{A^2}{2\pi^2 f^2 d} \cdot \sin(2\pi f d) \tag{3.284}$$



3.33.11 Eigenschaften

Linearität

$$F\left(a_1 h_1(t) + a_2 h_2(t)\right) = a_1 \cdot F\left(h_1(t)\right) + a_2 \cdot F\left(h_2(t)\right) \tag{3.285}$$

$$a_1 h_1(t) + a_2 h_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, a_1 H_1(f) + a_2 H_2(f) \tag{3.286}$$

Symmetrie

$$h_{(t)} \circ\!\!-\!\!- H_{(f)} \quad \Longrightarrow \quad H_{(t)} \bullet\!\!-\!\!\circ\, h_{(-f)} \tag{3.287}$$

Zeitskalierung

$$h_{(t)} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet H_{(f)} \quad \Longrightarrow \quad h_{(kt)} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{|k|} H\left(\frac{f}{k}\right) \tag{3.288}$$

Frequenzskalierung

$$H_{(f)} \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ h_{(t)} \quad \Longrightarrow \quad H_{(kf)} \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \frac{1}{|k|} h\left(\frac{t}{k}\right) \tag{3.289}$$

Zeitverschiebung

$$h_{(t)} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet H_{(f)} \quad \Longrightarrow \quad h_{(t-t_0)} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet H_{(f)} \cdot e^{-2\pi j f t_0} \tag{3.290}$$

Frequenzverschiebung

$$H_{(f)} \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ h_{(t)} \quad \Longrightarrow \quad H_{(f-f_0)} \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ h_{(t)} \cdot e^{2\pi j f_0 t} \tag{3.291}$$

Differentiation im Zeitbereich

$$h_{(t)} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet H_{(f)} \quad \Longrightarrow \quad h'_{(t)} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet 2\pi j f \cdot H_{(f)} \tag{3.292}$$

mit $\lim_{t\to\pm\infty} h_{(t)} = 0$

$$h^{(n)}_{(t)} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet (2\pi j f)^n \cdot H_{(f)} \tag{3.293}$$

Differentiation im Frequenzbereich

$$H_{(f)} \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ h_{(t)} \quad \Longrightarrow \quad H'_{(f)} \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ (-2\pi j f) \cdot h_{(t)} \tag{3.294}$$

mit $\lim_{f\to\pm\infty} H_{(f)} = 0$

$$H^{(n)}_{(f)} \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ (-2\pi j f)^n \cdot h_{(t)} \tag{3.295}$$

3.34 Statistik

3.34.1 Begriffe

Grundgesamtheit, Stichprobe: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, Merkmal X

$$\text{relative Häufigkeit} = \frac{\text{absolute Häufigkeit}}{n}$$

	Diskret	Stetig
Stichprobe	emp. Häufigkeitsfunktion emp. Verteilungsfunktion	emp. Dichte emp. Verteilungsfunktion
Grunsgesamtheit	Wahr.-Funktion Wahr.-Verteilung	Wahr.-Dichte Wahr.-Verteilung

3.34.2 Statistische Parameter

Stichprobe: $x_1 \ldots x_n$

Arithmetisches Mittel

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{3.296}$$

Median

$$\widetilde{x_1} \ldots \widetilde{x_n} \qquad : \text{geordnete Stichprobe} \tag{3.297}$$

$$x_{med} = \begin{cases} \widetilde{x_{\frac{n+1}{2}}} & \text{für } n \text{ ungerade} \\ \frac{\widetilde{x_{\frac{n}{2}}} + \widetilde{x_{\frac{n}{2}+1}}}{2} & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases} \tag{3.298}$$

Modus

$$x_{mod} \quad \hat{=} \quad \text{häufigst aufgetretene Beobachtung} \tag{3.299}$$

Spannweite

$$x_o - x_u \quad = \quad (\text{max. Wert} \quad - \quad \text{min. Wert}) \tag{3.300}$$

Standardabweichung

$$s_x = \sqrt[2]{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\overline{x} - x_i)^2} \tag{3.301}$$

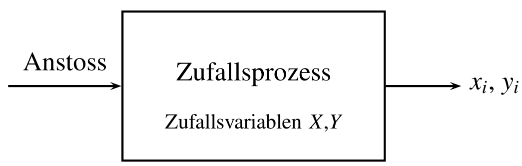
$$\text{oft auch :} \quad s_x = \sqrt[2]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\overline{x} - x_i)^2} \tag{3.302}$$

Empirische Varianz oder Stichprobenvarianz

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\overline{x} - x_i)^2 \tag{3.303}$$

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}|\overline{x} - x_i| \qquad \text{mögliche Definition} \tag{3.304}$$

3.34.3 Zweidimensionale Stichproben



	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	$\sum$
x_1	f_{11}	f_{12}	$\cdots$	f_{1n}	$\sum f_{1i}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_n	f_{n1}	f_{n2}	$\cdots$	f_{nn}	$\sum f_{ni}$
$\sum$	$\sum f_{i1}$	$\cdots$	$\cdots$	$\sum f_{in}$	

Randverteilung für y

3.34.4 Robustheit von Masszahlen

Stichprobe: $x_1 \ldots x_n$
$\overline{x}$ ändert wegen einer Änderung eines einzigen x_i-Wertes.
x_{mod} ändert wahrscheinlich nicht.
Allgemein: x_{mod} ist robuster als $\overline{x}$
Vernachlässigung von Masswerten an den Rändern. Beispiel:

$$\overline{\overline{x}} = \frac{1}{n-20} \cdot \sum_{i=10}^{n-10} x_i \qquad \text{für } n > 20$$

$$\overline{\overline{x}} \quad \text{ist robuster als} \quad \overline{x}$$

3.34.5 Kombinatorik

	ohne Wiederholung	mit Wiederholung
ohne Reihenfolge	$C_n^k = \binom{n}{k}$	${}^wC_n^k = \binom{n+k-1}{k}$
mit Reihenfolge	$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	${}^wV_n^k = n^k$

Spezialfall: $V_n^n = n!$ $\quad\hat{=}$ Permuationen

3.34.6 Wahrscheinlichkeit

$$P(\mathbb{A}) = \frac{|\mathbb{A}|}{|\Omega|} \hat{=} \frac{günstige Fälle}{\text{mögliche Fälle}} \tag{3.305}$$

Stillschweigende Annahme: alle Fälle sind gleich Wahrscheinlich.
Beispiel: werfen von 2 Würfeln

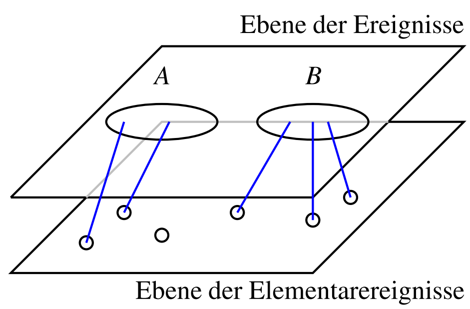
$$P(\text{Augensumme } > 4) = ? \qquad \text{mit } z = \text{ Augensumme}$$

z	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(z)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

	1	2	3	4	5	6	: 2. Wurf
1	2	3	4	5	6	7	
2	3	4	5	6	7	8	
3	4	5	6	7	8	9	
4	5	6	7	8	9	10	
5	6	7	8	9	10	11	
6	7	8	9	10	11	12	
1. Wurf							

$$\begin{aligned} P(\text{Augensumme } > 4) &= 1 - P(\text{Augensumme } \leq 4) \\ &= 1 - \frac{1+2+3}{36} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

3.34.7 Ereignisse



Verknüpfungen:

$\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$: Vereinigung
$\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$: Durchschnitt
$\mathbb{A} \backslash \mathbb{B}$: Differenz
Ω : sicheres Ereignis
$\emptyset$: unmögliches Ereignis
$\overline{\mathbb{A}}$: Komplementiertes Ereignis zu $\mathbb{A}$

3.34.8 Ereignisalgebra

Ω Menge, σ-Algebra, $\mathcal{A}$ ist Teilmenge von $P(\Omega)$, Potenzmenge mit Eigenschaften:

1. $\Omega \subset \mathcal{A}$
2. wenn $\mathbb{A} \subset \mathcal{A}$ dann $\overline{A} \subset \mathcal{A}$
3. Folge $\mathbb{A}_i \subset \mathcal{A}$ dann $\lim\limits_{n \to \infty} \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathbb{A}_i \subset \mathcal{A}$

3.34.9 Axiomatische Wahrscheinlichkeitstheorie

Definition:

$$P(\Omega) = 1 \tag{3.306}$$

$$P\Big(\bigcup \mathbb{A}_i\Big) = \sum_i P(\mathbb{A}_i) \text{ mit } \mathbb{A}_i \cap \mathbb{A}_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \tag{3.307}$$

$$\begin{aligned}
&\implies P(\emptyset) = 0\\
&P(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = P(\mathbb{A}) + P(\mathbb{B}) \text{ sofern } \mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \emptyset\\
&P(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = P(\mathbb{A}) + P(\mathbb{B}) - P(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})\\
&P(\mathbb{A} \cup \overline{\mathbb{A}}) = 1\\
&\quad P(\mathbb{A}) = 0 \wedge \mathbb{A} \neq \emptyset \quad : \text{fast unmögliches Ereignis}\\
&\quad P(\mathbb{A}) = 1 \wedge \mathbb{A} \neq \Omega \quad : \text{fast sicheres Ereignis}
\end{aligned}$$

3.34.10 Bedingte Wahrscheinlichkeit

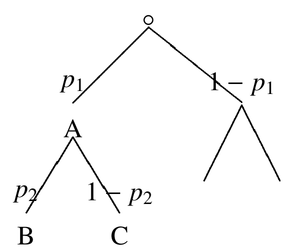
Definition:

$$P(\mathbb{A}/\mathbb{B}) = \frac{P(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})}{P(\mathbb{B})} \tag{3.308}$$

Multiplikationssatz:

$$P(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) = P(\mathbb{A}/\mathbb{B}) \cdot P(\mathbb{B}) \tag{3.309}$$

3.34.11 Ereignisbäume



$$\begin{aligned}
P(A) &= p_1\\
P(B) &= p_1 \cdot p_2\\
P(C) &= p_1 \cdot (1 - p_2)
\end{aligned}$$

3.34.12 Unabhänigkeit von Ereignissen

Definition: unabhängig wenn:

$$P(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) = P(\mathbb{A}) \cdot P(\mathbb{B}) \tag{3.310}$$

3.34.13 Zufallsvariablen

Eine Zufallsvariable ist ein quantitatives Merkmal eines Zufallsprozesses.

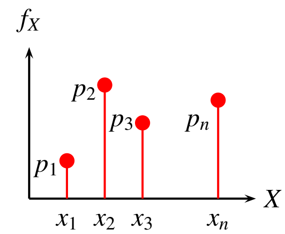
Diskrete Zufallsvariablen und ihre Verteilungen

Jedem Ereignis wird eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet:

$$P(X = x_i) = p_i \qquad i = 1..n \qquad \text{mit } \sum_i p_i = 1 \tag{3.311}$$

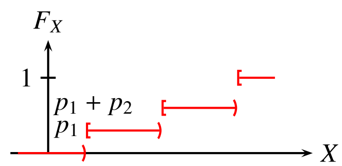
Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten heisst *Wahrscheinlichkeitsfunktion*:

$$f_x : x_i \mapsto P(X = x_i) = p_i \tag{3.312}$$



Verteilungsfunktion (Wahrscheinlichkeitsfunktion)

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_i p_i \tag{3.313}$$



desktriptive Statistik	Wahrscheinlichkeitstheorie
empirische Dichte	Wahrscheinlichkeitsfunktion
relative Häufigkeitsfunktion	Wahrscheinlichkeitsfunktion
Stichprobenmittel	Erwartungswert
Stichprobenvarianz	Varianz
Stichprobenstandardabweichung	Standardsabweichung

Erwartungswert

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) \cdot x_i = \mu_X \tag{3.314}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i \tag{3.315}$$

$$Y = a \cdot x + b \qquad \Longrightarrow \qquad E(Y) = a \cdot E(X) + b$$

Varianz

$$VAR(X) = \sum_{(i=1)}^{n} P(X = x_i) \cdot (x_i - \mu_X)^2 = \sigma_X^2 \tag{3.316}$$

$$= E(X^2) - E^2(X) \tag{3.317}$$

$$Y = a \cdot x + b \qquad \Longrightarrow \qquad VAR(Y) = a^2 \cdot VAR(X)$$

Standardabweichung

$$\sigma_X = \sqrt{(}VAR(X)) \tag{3.318}$$

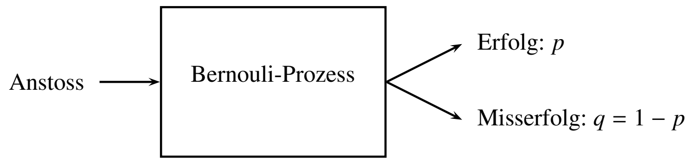
Diskrete Gleichverteilung

Gleichverteilung: $P(X = x_i) = \frac{1}{n} \quad i = 1..n$

$$E(X) = \overline{x}$$

$$VAR(X) = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right] - (\overline{x})^2$$

Bernoulli / Zweipunktverteilung



$$E(X) = p$$
$$VAR(X) = p \cdot q = p \cdot (1 - p)$$

Binominal-Verteilung

Binominalprozess $\hat{=}$ n-malige Wiederholung des Bernoulli-Prozess. X $\hat{=}$ Anzahl Erfolge bei n-maliger Durchführung eines Zweipunkt-Prozesses.

$$x_i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$
$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$
$$E(X) = n \cdot p$$
$$VAR(X) = n \cdot p \cdot q = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

<u>Satz:</u>

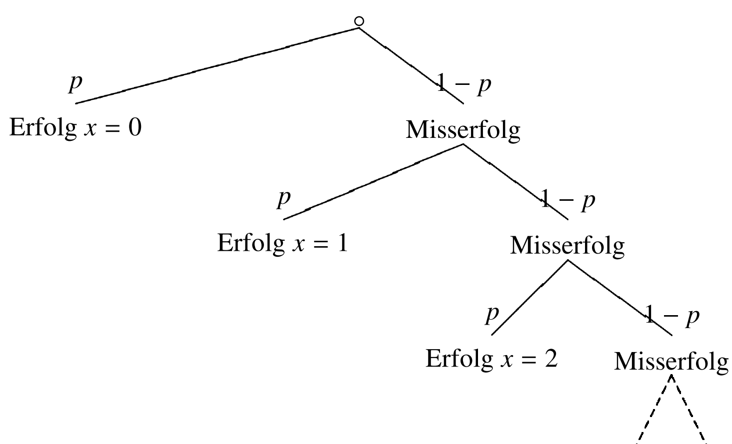
$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \tag{3.319}$$
$$VAR(X + Y) = VAR(X) + VAR(Y) \tag{3.320}$$

sofern X und Y unabhängig voneinander.

Geometrische Verteilung

Folge von Bernoulli-Experimenten:

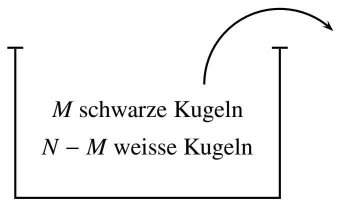
$$X \hat{=} \text{ Anzahl Misserfolge vor dem 1. Erfolg}$$
$$P(X = k) = p \cdot (1 - p)^k \quad k = 0, \ldots$$



$$E(X) = \frac{q}{p} = \frac{1 - p}{p} \qquad VAR(X) = \frac{1 - p}{p^2}$$

Hypergeometrische Verteilung

Von Bedeutung bei der Qualitätskontrolle.



$$\begin{aligned} n &: \text{Kugeln, ohne Zurücklegen} \\ X &: \text{Anzahl gezogene schwarze Kugeln} \\ M &: \text{Anzahl schwarze Kugeln} \\ N - M &: \text{Anzahl weisse Kugeln} \end{aligned}$$

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}}{\binom{N-M}{n-k}}\binom{N}{n}$$

Poisson-Verteilung

Ankunftsprozess: Poststelle, Check-in-Schalter, etc.

$$X \mathrel{\hat{=}} \text{Anzahl Ankünfte in einer gegebenen Periode}$$

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} \qquad \text{mit } k = 0, 1, \ldots \text{ und } \lambda : \text{Parameter}$$

$$E(X) = \lambda \qquad VAR(X) = \lambda$$

Stetige Zufallsvariablen

Wahrscheinlichkeitsdichte (Dichtefunktion)

1. $f_X(x) \geq 0 \quad \forall x$
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$
3. $P(a \leq x \leq b) = \int\limits_a^b f_X(\tau)\, d\tau = F_X(b) - F_X(a)$

Erwartungswert

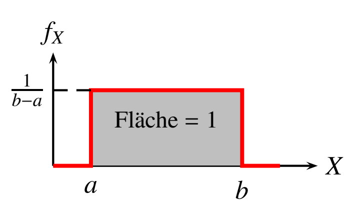
$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\, dx = \mu_X \tag{3.321}$$

Varianz

$$VAR(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 \cdot f_X(x)\, dx = \sigma_X \tag{3.322}$$

$$= E(X^2) - \mu_X^2 \tag{3.323}$$

Gleichverteilung



$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & : \text{für } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.324}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \tag{3.325}$$

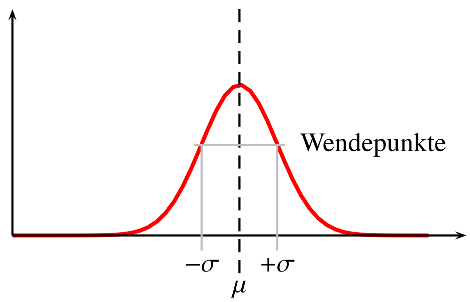
$$E(X^2) = \frac{1}{3}(b^2 + ab + a^2) \tag{3.326}$$

$$VAR(X) = \frac{(a-b)^2}{12} \tag{3.327}$$

Standardfall: random $\hat{=}$GL(0, 1)

Normalverteilung (Gauss-Verteilt)

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \text{ mit } \mu, \sigma \text{ als Parameter} \tag{3.328}$$



Schreibweise: $x \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$
Verteilungsfunktion F_X wird mit Φ bestimmt (siehe Tabelle).

Satz:

$$x \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad \Rightarrow \quad Y = aX + b \sim \mathcal{N}(a \cdot \mu + b, a^2 \cdot \sigma^2) \tag{3.329}$$

Exponentialverteilung

$$f_X(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \cdot u(x) \tag{3.330}$$

u : unit-step
Anwendung: Beschreibung der Lebensdauer von Objekten.

$$E(X) = \frac{1}{x} \qquad VAR(X) = \frac{1}{x^2}$$

Momente einer Verteilung k-tes Moment einer Zufallsvariablen $X : E(X^k)$
k-tes zentriertes Moment einr Zufallsvariablen $X : E(|x-c|^k)$
Spezialfälle:

1. Moment entspricht dem *Erwartungswert*
2. Moment zentriert beüglich μ entspricht der *Varianz*

Satz: (Markoff-Ungleichung)

$$P(|x-c| \geq x) \leq \frac{1}{x^k} \cdot E(|x-c|^k) \text{ sofern } E(|x-c|^k) < \infty \tag{3.331}$$

Spezialfall: Tschebyscheff-Ungleichung

$$P(|x-\mu| \geq x) \leq \frac{1}{x^2} \cdot E(|x-\mu|^2) = \frac{\sigma_x^2}{x^2} \tag{3.332}$$

Diskret-Stetig

Binominal - Poission Wenn $x \sim \mathrm{B}(n, p)$ mit n gross und p klein, dann ist

$$X \sim P_0(\lambda) \text{ mit } \lambda = n \cdot p \tag{3.333}$$

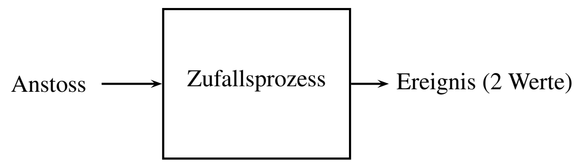
Binominal - Normalverteilung

$$X \sim \mathrm{B}(n, p) \text{ mit } n \cdot p \cdot q > q \tag{3.334}$$

dann

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \text{ mit } \mu = n \cdot p \text{ und } \sigma^2 = n \cdot p \cdot q \tag{3.335}$$

3.34.14 Mehrdimensionale Zufallsvariablen



Diskret

Zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(X = x_i, Y = y_i)$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1 \qquad \text{und } p_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$$

$$F_{XY} = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x_i \leq x} \sum y_i \leq y p_{ij} \tag{3.336}$$

Stetig

$$f_{XY}(x, y) \text{ mit } \iint\limits_{\mathbb{G}} f_{XY}(x, y)\, dxdy = 1 \text{ und } f_{XY} \geq 0 \quad \forall x, y \tag{3.337}$$

$$F_{XY} = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y)\, dxdy \tag{3.338}$$

Zweidimensionale Normalverteilung

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\Delta}} \cdot e^{\begin{pmatrix} x - \mu_x & y - \mu_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x - \mu_x \\ y - \mu_y \end{pmatrix}} \tag{3.339}$$

wobei

$$\mu_x = E(X) \quad \sigma_1^2 = VAR(X) \qquad \text{und} \qquad \mu_y = E(Y)\sigma_y^2 = VAR(Y)$$
$$\sigma_{12} : \text{weiterer Parameter}$$
$$\Delta = \sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 - (\sigma_{12})^2 \tag{3.340}$$

Unabhängigkeit

Zwei Zufallsvariablen X und Y sind unabhängig, wenn

$$f_{XY} = f_X \cdot f_Y \tag{3.341}$$

diskreter Fall:

$$P(X = x_i, Y = y_i) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_i) \tag{3.342}$$

Summe von Zufallsvariablen

Ist $Z = X + Y$ mit $X \sim F_X(x)$ und $Y \sim F_Y(y)$ voneinander unabhängig, dann ist:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(\tau) \cdot f_Y(z-\tau)\, d\tau \qquad \hat{=}\text{Faltungsintegral} \tag{3.343}$$

Zur Berechnung können eine der folgenden Möglichkeiten gewählt werden:

- diskret
- Lapalce-Transformation
- Fourier-Transformation

Wenn $X_1 \sim P_o(\lambda_1)$ und $X_2 \sim P_u(\lambda_2)$ diskret und unabhängig sind und $Z = X_1 + X_2$ gilt, dann ist

$$P(Z \leq z) = \frac{e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{z!}(\lambda_1 + \lambda_2)^2 \tag{3.344}$$

Satz: Die Summe zweier unabhängiger poissonverteilten Zufallsvariablenist wiederum poissonverteilt.

$$X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$
$$X_1 - X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

falls

$$X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2) \quad \text{und} \quad X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$$

Produkt von Zufallsvariablen

Falls X und Y unabhängig sind:

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) \tag{3.345}$$

Falls X und Y abhängig voneinander:

$$E(X \cdot Y) \neq E(X) \cdot E(Y)$$
$$VAR(X \cdot Y) \neq VAR(X) \cdot VAR(Y)$$

Kovarianz

$$COV(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) \tag{3.346}$$

X und Y sind unabhängig voneinander

Korelation

$$\rho(X, Y) = \frac{COV(X, Y)}{\sqrt{VAR(X) \cdot VAR(Y)}} \tag{3.347}$$

Satz:

$$|\rho| \leq 1 \tag{3.348}$$

Satz:

$$COV(X, Y) = E\left[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))\right] \tag{3.349}$$

3.34.15 Zentraler Grenzwertsatz

Saloppe Erklärung:

$$\lim_{n\to\infty} \overline{x} = E(X) \tag{3.350}$$

formal:

$$X = z_1 + z_2 + \cdots + z_n \qquad z_i \text{ unabhängig, identisch verteilt}$$
$$\implies \qquad X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \tag{3.351}$$

3.34.16 Markov-Ketten

Stochastischer Prozess

Folge von Zufallsvariablen U_i beschreibt den Zustand eines Systems hinsichtlich eines Merkmals. Dies entspricht einem *Stochastischem Prozess*.

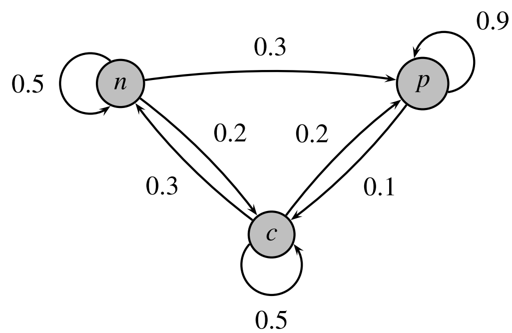
Definition: Markov-Eigenschaft U_i ist nur von U_{i-1} anhängig. Konsequenz: $P(U_i = u)$ ist von U_{i-1} abhängig, d.h. $P(U_i = u/U_{i-1} = w)$ ist eine *bedingte Wahrscheinlichkeit*, eine *Übergangswahrscheinlichkeit*.

Definition: Folge von U_i mit Markov-Eigenschaft heisst *Markov-Kette*. Übergangswahrscheinlichkeiten können als Matrix geschrieben werden:

$$M = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{mit Zeilensumme} = 1$$

Ausgangslage: $P(U_1 = w_k) = \mu_k$

Beispiel:



	n	p	c
n	0.5	0.3	0.2
p	0.0	0.9	0.1
c	0.3	0.2	0.5

$$\begin{aligned} t = 0 \quad &: \vec{\mu} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \\ \vec{\nu}^{(1)} &= \vec{\mu} \cdot M \\ \vec{\nu}^{(n+1)} &= \vec{\mu} \cdot M^n \end{aligned}$$

Grenzwert: existiert und ist $\vec{\pi} \implies \vec{\pi} = \vec{\pi} \cdot M$ (nur Eigenvektor zu $\lambda = 1$).

3.34.17 χ^2-Verteilung

Stetige Zufallsvariable X mit der Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \tag{3.352}$$

heisst χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden $X \sim \chi^2(n)$ oder $X \sim \mathrm{Chi}^2(n)$.

Gamma-Funktion

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{k-1} \, dt \quad \text{mit } \alpha > 0 \tag{3.353}$$

mit

$$\Gamma(1) = 1$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$
$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha - \Gamma(\alpha)$$

$$E(X) = n \qquad X_1 \sim \chi^2(n_1)$$
$$VAR(X) = 2n \qquad X_2 \sim \chi(n_2)$$

sind voneinander unabhängig $\Longrightarrow X_1 + X_2 \sim \chi^2(n_1+n_2)$.

<u>Satz:</u>

$$x_i \sim \mathcal{N}(0,1) \qquad \text{mit } i = 1\ldots n \text{ , unabhängig}$$
$$\Longrightarrow z = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \sim \chi^2(n) \tag{3.354}$$

3.34.18 t-Verteilung

Stetige Zufallsvariable X mit der Dichte

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{n})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \qquad x \in \mathbb{R} \tag{3.355}$$

Grenzfall: $n \to \infty : f_X(x) \to \mathcal{N}(0,1)$

$$E(X) = 0 \qquad \text{(wegen Symmetrie)}$$
$$VAR(X) = \frac{n}{n-2} \qquad \text{für } n \geq 3$$

3.34.19 F-Verteilung

Eine Zufallsvariable X mit der Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})\cdot(\frac{m}{n})^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{n})\cdot\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \frac{x^{\frac{n}{2}}-1}{(1+\frac{m}{n}\cdot x)^{\frac{m+n}{2}}} & \text{für } x > 0 \end{cases} \tag{3.356}$$

heisst *F-Verteilt* mit (m,n) Freiheitsgrade.

$$E(X) = \frac{n}{n-2} \qquad \text{für } n \geq 3$$
$$VAR(X) = \frac{2n^2(m+n-2}{m(n-2)^2(n-4)} \qquad \text{für } x \geq 5$$
$$X_1 \sim \chi^2(n_1) \qquad \text{und} \qquad X_2 \sim \chi^2(n_2)$$

voneinander unabhängig

$$\Longrightarrow \frac{X_1/n_1}{X_2/n_2} \sim F(n_1,n_2)$$

wobei

$$X \sim F(m,n) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{x} \sim F(n,m)$$

Kapitel 4

Diskrete Mathematik

4.1 Begriffe

Aussage "p"

Formal: p

$\mathcal{D}$: true/false, wahr/falsch, $1/0$

Aussage "*nicht* p"

Formal: $\neg p$ (Negation)

$\mathcal{D}$: false/true, falsch/wahr, $0/1$

Aussage "P *und* Q"

Formal: $p \wedge q$ oder $p \cdot q$ (Konjunktion)

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Aussage "P *oder* Q"

Formal: $p \vee q$ oder $p + q$ (Disjunktion)

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Aussage "*wenn* P *dann* Q"

Formal: $p \rightarrow q$ (Konditional)

p	q	$p \vee q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Aussage "Q *genau dann wenn* P"

Formal: $p \leftrightarrow q$ (Bikonditional)

p	q	$p \vee q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Aussage "*aus* P *folgt* Q"

Formal: $P \Longrightarrow Q$ (Folgerung)

Aussage "P *ist äquivalent zu* Q"

Formal: $P \Longleftrightarrow Q$ (Äquivalenz)

4.1.1 Allgemein

$$\begin{aligned} W, F, P, Q, \ldots &\hat{=} \text{Atomare Bausteine, Atome, Formeln} \\ W, F &\hat{=} \text{Wahrheitswerte} \end{aligned}$$

4.1.2 Prioritäten

	gleichbleibend $\longrightarrow$	
abnehmend $\downarrow$	$\neg$	
	$\wedge$	$\vee$
	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$

4.1.3 Allgemeingültigkeit

Eine Formel ist allgemeingültig, wenn sie für jede Belegung der Wahrheitswert W ergibt.
Auch *Tautologie* genannt.

4.1.4 Definitionen

Eine Formel heisst erfüllbar, wenn es min. eine Belegung gibt für die sie Wahr ist.
Eine Formel B folgt aus einer anderen Formel A, wenn für jede Belegung die A Wahr macht, B wahr wird.
Eine Formelmenge y folgt aus der Formelmenge x, wenn jede Formel aus y Wahr wird für Belegungen die x Wahr macht.
Zwei Formeln oder Formelmengen sind zueinander äquivalent, wenn sie gegenseitig auseinander Folgern.

4.2 Beweis-Strategien

4.2.1 Mögliche Strategien

- Beweis durch *Kontraposition*
- Beweis durch *Widerspruch*
- Beweis durch *Fallunterscheidung*
- *Direkter Beweis*
- *Induktionsbeweis*

4.2.2 Widersprüchlichkeit

Eine Formal A heisst *widersprüchlich*, wenn sowohl A als auch $\neg A$ für gleiche Belegungen Wahr werden.
Eine Formelmenge heisst Widersprüchlich, wenn für min. eine Formel obiges gilt.

4.3 Entscheidungsverfahren

Entscheidungsverfahren für Erfüllbarkeit entspricht einem *Algroithmus*
Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit und logische Folgerungen für endliche Formelmengen sind entscheidbar.
Umfang: Anzahl Zeilen der Wahrheitstabelle = $2^{\text{Anzahl Atome}}$

4.4 Normalformen

Ein *Literal* (L) entspricht einem aussagekräftigen Atom oder seiner Verneinung.

4.4.1 Konjunktive Normalform (KNF)

Formal: Produkt von Summen

$$\bigwedge_{j=1}^{n} \left(\bigvee_{i=1}^{m} L_{ij} \right) \tag{4.1}$$

- Sind nicht eindeutig bestimmt!
- Verschiedene Formeln können die gleiche KNF besitzen

4.4.2 Disjunktive Normalform (DNF)

Formal: Summe von Produkten

$$\bigvee_{j=1}^{n} \left(\bigwedge_{i=1}^{m} L_{ij} \right) \tag{4.2}$$

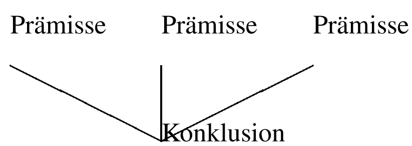
4.4.3 Ausgezeichnete Normalform

Alle Literale kommen in einem Disjunktionsterm bzw. Konjunktionsterm vor. Die ausgezeichnete Normalform ist nicht die kürzeste Möglichkeit eine Formel zu beschreiben.

- **Ausgezeichnete KNF:** Nullwerte (Falsch) in der Wahrheitstabelle betrachten
- **Ausgezeichnete DNF:** Einswerte (Wahr) in der Wahrheitstabelle betrachten

4.5 Ableitungen

$$\underbrace{A \quad \wedge \quad \neg A}_{\text{Prämisse}} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{F}_{\text{Konklusion}} \tag{4.3}$$



4.6 Boolsche Algebra

Grundmenge: $\mathbb{B} = \{0, 1\}$

4.6.1 Axiome

$$0 \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0 \tag{4.4}$$
$$0 + 1 = 1 + 0 = 1 + 1 = 0 \tag{4.5}$$
$$0 + 0 = 0 \tag{4.6}$$
$$1 \cdot 1 = 1 \tag{4.7}$$
$$\overline{0} = 1 \qquad \text{Komplement, Negation} \tag{4.8}$$
$$\overline{1} = 0 \qquad \text{Komplement, Negation} \tag{4.9}$$

4.6.2 Dualisieren

$$s^d \quad \hat{=} \quad \text{“}s \text{ dual”}$$

Inverseion der Funktionen und Operationen:

$$\begin{array}{ccc} + & \rightarrow & \cdot \\ \cdot & \rightarrow & + \\ 0 & \rightarrow & 1 \\ 1 & \rightarrow & 0 \end{array}$$

4.6.3 Normalformen

Disjuktive Normalform

Summe von Produkten

Siehe auch *disjunktive Normalform* in der Aussagenlogik.

Konjunktive Normalform

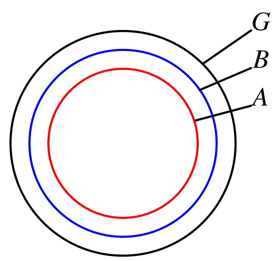
Produkt von Summen

Siehe auch *konjunktive Normalform* in der Aussagenlogik.

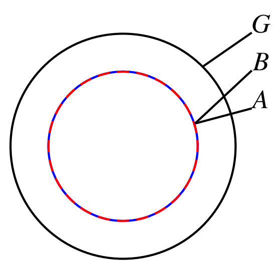
4.7 Mengen

4.7.1 Begriffe

Mengeh und Teilmengen



$$\mathbb{A} \subset \mathbb{B} \tag{4.10}$$



$$\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B} \quad \text{und} \quad \mathbb{B} \subseteq \mathbb{A} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbb{A} = \mathbb{B} \tag{4.11}$$

Leere Menge

$$\text{Leere Menge:} \qquad \emptyset \quad \text{oder} \quad \{\} \tag{4.12}$$

Standardmengen

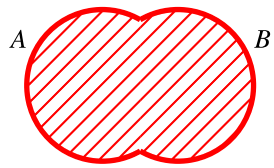
$\mathbb{N}, \mathbb{N}_0$	Natürliche Zahlen
$\mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}_0^+, \mathbb{Z}^-, \mathbb{Z}_0^-, \mathbb{Z}$	Natürliche ganze Zahlen
$\mathbb{Q}^+, \mathbb{Q}_0^+, \mathbb{Q}^-, \mathbb{Q}_0^-, \mathbb{Q}$	
$\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}^-, \mathbb{R}_0^-, \mathbb{R}$	reelle Zahlen
$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen

Potenzmenge

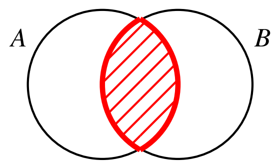
$\mathbb{P}(\mathbb{A})$ entspricht der Potenzmenge von $\mathbb{A}$. Die Potenzmenge ist die Menge aller Teilmengen, inkl. $\emptyset$.

4.7.2 Verknüpfungen

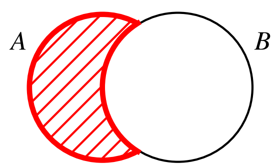
Vereinigung: $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$



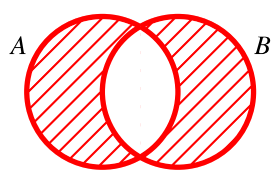
Schnittmenge: $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$



Differenz: $\mathbb{A} \backslash \mathbb{B}$



Symmetrische Differenz: $\mathbb{A} \triangle \mathbb{B}$



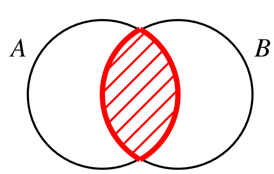
4.7.3 Dualisieren

Ersetzen	durch
$\cup$	$\cap$
$\cap$	$\cup$
$\emptyset$	$\mathbb{G}$
$\mathbb{G}$	$\emptyset$

$$(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) \cup \emptyset = \mathbb{D} \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{D}^d = (\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) \cap \mathbb{G}$$
$$\mathbb{A} = \mathbb{B} \Longleftrightarrow \mathbb{A}^d = \mathbb{B}^d$$

4.7.4 Venn-Diagramm

Grafische Veranschaulichung von Mengen. Alternative zu Venn-Diagramm: Zugehörigkeitstabelle.



$$\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$$

4.7.5 Indexmenge

Zusammenfassung aller Werte, die ein Index annhemen kann.

$$\overline{\bigcup_{i \in \mathrm{II}} \mathbb{A}_i} = \bigcap_{i \in \mathrm{II}} \mathbb{A}_i \qquad \overline{\bigcap_{i \in \mathrm{II}} \mathbb{A}_i} = \bigcup_{i \in \mathrm{II}} \mathbb{A}_i \tag{4.13}$$

4.7.6 Mächtigkeit

$|\mathbb{A}|$ $\hat{=}$ Anzahl der Elemente von $\mathbb{A}$, sofern $\mathbb{A}$ endlich.
$card(\mathbb{A})$ $\hat{=}$ Mächtigkeit der Menge $\mathbb{A}$.
Für endliche Mengen: $card(\mathbb{A}) = |\mathbb{A}|$. Für unendliche Mengen dient $\mathbb{N}$ als Referenzmenge.

$$|\mathbb{A} \cup \mathbb{B}| = |\mathbb{A}| + |\mathbb{B}| - |\mathbb{A} \cap \mathbb{B}|$$
$$|\mathbb{A} \cup \mathbb{B} \cup \mathbb{C}| = |\mathbb{A}| + |\mathbb{B}| + |\mathbb{C}| - |\mathbb{A} \cap \mathbb{B}| - |\mathbb{A} \cap \mathbb{C}| - |\mathbb{B} \cap \mathbb{C}| + |\mathbb{A} \cap \mathbb{B} \cap \mathbb{C}|$$

4.8 Wahrscheinlichkeitstheorie

$$P = \frac{\text{Anzahl günstige Fälle}}{\text{Anzahl mögliche Fälle}} \tag{4.14}$$
$$P(\mathbb{A}) = p \qquad \text{mit} \quad p \in [0, 1]$$

4.9 Kombinatorik

4.9.1 Permutation

Die Permutation ist die Anordnung von n Elementen *ohne Wiederholung* und *mit Reihenfolge*.

$$P_n = n! \tag{4.15}$$

4.9.2 Variationen

Variationen ist die Anordnung von k Elementen aus insgesammt n *mit Reihenfolge*.

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{4.16}$$

"Anzahl Variationen von n Elementen zur k-ten Klasse"

4.9.3 Variationen mit Wiederholung

Es sind die Anordnung von k aus n Elementen *mit Wiederholung* und *mit Reihenfolge*.

$$^{w}V_n^k = n^k \tag{4.17}$$

4.9.4 Kombinationen

Kombinationen sind die Anordnung von k aus n Elementen *ohne Reihenfolge* und *ohne Wiederholung*.

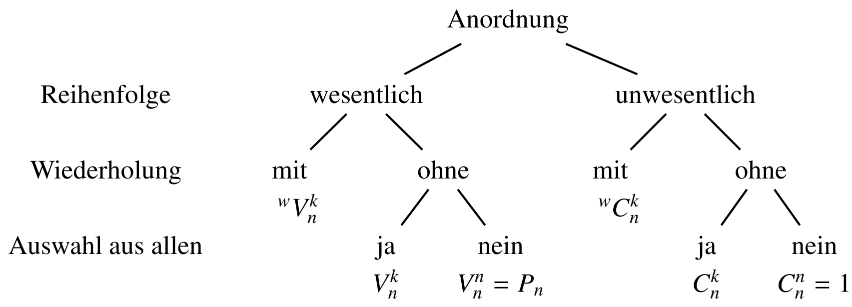
$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k} \tag{4.18}$$

4.9.5 Kombinationen mit Wiederholungen

Es ist die Anordnung von k aus n Elementen *mit Wiederholung* und *ohne Reihenfolge*.

$$^{w}C_n^k = \binom{n+k-1}{k} \tag{4.19}$$

4.9.6 Klassifizierung



$$P_n = n!$$
$$ {}^wV_n^k = n^k$$
$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$
$$ {}^wC_n^k = \binom{n+k-1}{k}$$
$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

4.10 Rekursionen

Eine Rekursion ist eine Beziehung einer Funktion an der Stelle n zu Werten an der Stelle $n-1, n-2, \dots, n-k$.
Beispiel: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

4.11 Erzeugende Funktionen

Entspricht einer Auflösung einer Rekursion, mit welcher direkt das n-te Glied berechnet werden kann, anstatt von Anfang bis zum n-ten Glied durchzurechnen.
Definition: $a_0, a_1, \dots$ sei eine Folge von reellen Zahlen, dann heisst die Funktion

$$f : x \mapsto a_0 + a_1 + a_2x^2 + \cdots \quad = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

ezeugende Funktion für die gegebene Zahlenfolge.

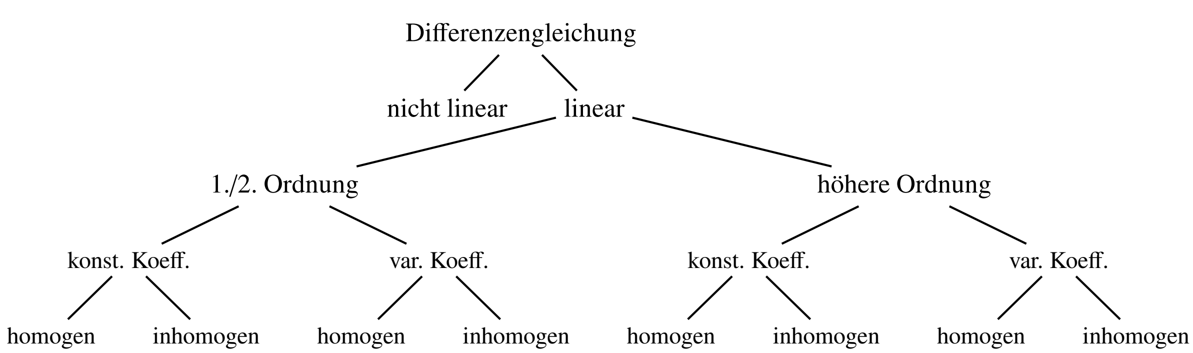
4.12 Differenzengleichungen

Auch Rekursinosgleichungen genannt.

4.12.1 Definition

Differenzengleichung k-ter Ordnung: $F(y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-k})$

4.12.2 Klassierung



Der Typ bestimmt die Lösungsmethode. Lösungsmethoden für lineare Differezengleichung mit konstanten Koeffizienten:

1. Z-Transformation
2. Konventionell
   (a) homogen
      i. mittels Ansatz
   (b) inhomogen
      i. mittels Ansatz vom Typ der Störfunktion
      ii. erzeugende Funktion
      iii. Operator-Technik

4.12.3 Lineare DGL, konst. Koeff, Homogen

Standardgleichung:

$$a_0 \cdot y_{t+n} + a_1 \cdot y_{t+n-1} + a_2 \cdot y_{t+n-2} + \cdots + a_n \cdot y_t = 0 \quad \forall t \tag{4.20}$$

Ansatz für Lösung: $y_t = c \cdot \lambda^t$

$$\Longrightarrow \qquad \begin{aligned} y_{t+1} &= c \cdot \lambda^{t+1} \\ y_{t+2} &= c \cdot \lambda^{t+2} \\ y_{t+n} &= c \cdot \lambda^{t+n} \end{aligned}$$

eingesetzt in DGL:

$$\begin{aligned} a_0 \cdot c \cdot \lambda^{t+n} + a_1 \cdot c \cdot \lambda^{t+n-1} + \cdots &= 0 \\ a_0 \cdot \lambda^{t+n} + a_1 \cdot \lambda^{t+n-1} + \cdots &= 0 \end{aligned}$$

Dies ist ein Polynom n-ten Grades, d.h. n Lösungen: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

4.12.4 Ansatz vom Typ der Störfunktion

Störfunktion	Ansatz für Lösung
β^t	$A \cdot \beta^t$
$\sin(\alpha t)$	$A \cdot \cos(\alpha t) + B \cdot \sin(\alpha t)$
$\cos(\alpha t)$	$A \cdot \cos(\alpha t) + B \cdot \sin(\alpha t)$
$P_m(t)$	$A_0 \cdot t^m + A_1 \cdot t^{m-1} + \cdots + A_m$
$\beta^t \cdot P_m(t)$	$\beta^t(A_0 \cdot t^m + A_1 \cdot t^{m-1} + \cdots + A_m)$
$\beta^t \cdot \sin(\alpha t)$	$\beta^t \cdot (A \cdot \cos(\alpha t) + B \cdot \sin(\alpha t))$

4.12.5 Unabhängigkeit der Lösung

Casorati-Determinante

$$\det \begin{pmatrix} (y_k)_1 & (y_k)_2 & \cdots & (y_k)_n \\ (y_{k+1})_1 & (y_{k+1})_2 & \cdots & (y_{k+1})_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (y_{k+n-1})_1 & (y_{k+n-1})_2 & \cdots & (y_{k+n-1})_n \end{pmatrix} \neq 0 \tag{4.21}$$

4.12.6 Komplexe Nullstellen

$$e^{j\phi} = \cos(\phi) + j\sin(\phi) \qquad \phi \in \mathbb{R} \tag{4.22}$$

$$\Longrightarrow \qquad c_s \cdot |\lambda_s|^k \cdot \cos(\phi \cdot k) + c_{s+1} \cdot |\lambda_s|^k \cdot \cos(\phi \cdot k) + \tag{4.23}$$

4.12.7 Lösen mittels erzeugende Funktion

$$\{a_k\} \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k = G(x) \tag{4.24}$$

Methode:

1. Multiplikation der DGL mit x^k
2. Summation der DGLs von $k = 0 \ldots \infty$
3. Vereinfachen unter Benutzung von $G(x)$, der erzeugenden Funktion
4. Isolierung der erzeugenden Funktion
5. Reihenentwicklung für erzeugende Funktion

4.13 Z-Transformation

$$\begin{array}{cccccc}
(1) & \text{Differenzgleichung} & \circ\!\!-\!\!\bullet & \text{gewöhnliche Gleichung} & (2) \\
 & & & \downarrow & \\
(4) & \text{Lösung der DGL} & \circ\!\!-\!\!\bullet & \underbrace{\text{Lösung der Gleichung}}_{\text{Bildbereich}} & (3)
\end{array}$$

4.13.1 Definition

$$\{y_k\} \circ\!\!-\!\!\bullet Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k \cdot z^{-k} \qquad z \in \mathbb{C} \tag{4.25}$$

Kurzschreibweise:

$$\begin{array}{rcl}
\mathfrak{z}\left(\{y_k\}\right) & = & Y(z) \\
\{y_k\} & \circ\!\!-\!\!\bullet & Y(z) \\
\mathfrak{z}(y_k) & = & Y(z)
\end{array}$$

4.13.2 Eigenschaften

Linearität

$$\mathfrak{z}(ay_k + bx_k) = a \cdot \mathfrak{z}(y_k) + b \cdot \mathfrak{z}(x_k) \tag{4.26}$$

Indexverschiebung

$$\mathfrak{z}(y_{k+s}) = z^s \left(Y_{(z)} - \sum_{k=0}^{s-1} \frac{y^k}{z^k} \right) \tag{4.27}$$

$$\mathfrak{z}(y_{k-s}) = \frac{1}{z^s} \left(Y_{(z)} - \sum_{k=1}^{s} y_{-k} \cdot z^k \right) \tag{4.28}$$

Dämpfungssatz

$$\mathfrak{z}\left(y_k \cdot e^{-ak}\right) = Y(z \cdot e^a) \tag{4.29}$$

Differentiation im Bildbereich

$$\frac{\partial}{\partial z} Y(z) = -\frac{1}{z} \cdot \mathfrak{z}(k \cdot y_k) \tag{4.30}$$

Differentation nach einem Parameter

$$\mathfrak{z}\left(\frac{\partial}{\partial a} y_k(a)\right) = \frac{\partial}{\partial a} \mathfrak{z}\left(y_k(a)\right) \tag{4.31}$$

Faltungssatz

$$\mathfrak{z}(y_k) \cdot \mathfrak{z}(x_k) = \mathfrak{z}(y_k * x_k) \tag{4.32}$$

Faltung

$$y_k * x_k = \sum_{m=0}^{k} x_m \cdot y_{k-m} \tag{4.33}$$

4.14 Numerik

4.14.1 Definition

Maschinenzahlen sind die im Rechner *exakt* darstellbaren Zahlen.

```
DecimalToBaseB(x,a)    // 0 <= x(10) < 1
  a[0] = 0
  k = 0
  while (x != 0)
    k = k + 1
    a[k] = floor(B*x)
    x = B * x - a[k]
  end while
```

4.14.2 Festpunktzahlen

$$z = \sigma \cdot \sum_{i=m}^{n} a_i \cdot B^i \qquad m, n \in \mathbb{Z} \quad (\text{typ. } m < 0 < n) \tag{4.34}$$

$$\text{mit} \quad \sigma = \text{sign} = \pm 1 \qquad \text{und} \quad a_i \in [0, B-1]$$

Allgemeines

- grösste Maschinenzahl $B^{n+1} - B^m$
- gleichmässige Verteilung
- jede im Maschinenbereich liegende Zahl lässt sich durch eine Zahl z^* approximieren mit

$$|z - z^*| \leq \frac{1}{2} B^{-m}$$

- $(a \oplus B) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$
- $a \odot b \neq a \cdot b$

Vorteile

- effiziente Arithmetik

Nachteile

- kleiner Zahlenbereich

4.14.3 Gleitpunktzahlen

$$z = \sigma \cdot m \cdot B^e \qquad e \in \mathbb{Z} \text{ und } e \in [e_{min}, e_{max}] \tag{4.35}$$

$$\text{mit} \qquad m = \sum_{k=1}^{n} a_{-k} \cdot B^{-k} \qquad \text{mit} \quad a_k \in [0, B-1]$$

Definition

Eine Gleitpunktzahl ist normalisiert falls

$$\frac{1}{B} \leq m < 1$$

d.h. die f"hrende Ziffer der Mantisse $\neq 0$

Allgemeines

- Für die Null existiert keine normalisierte Darstellung
- Lücke bei Null: $[0, B^{e_{min}-1}]$ enthält keine Maschinenzahl
- Anzahl normalisierte Zahlen:

$$2(B-1) \cdot B^{n-1} \cdot \Delta e = 2 \cdot B^{n-1}(B-1)(e_{max} - e_{min} + 1)$$

- Anzahl denomalisierte Zahlen:

$$2 \cdot B^{n-1}$$

Definition

$$\mathbb{M} = M(B, n; e_0, e_1) = \left\{ z | \sigma \left(\sum_{k=1}^{n} a_{-k} \cdot B^{-k} \right) \cdot B^{-k}, e \in [e_0, e_1] \right\} \tag{4.36}$$

$a \in M(B, n, e_0, e_1)$ heisst Maschinenzahl, darstellbare Zahl.
Charakteristika von $\mathbb{M} = M(B, n, e_0, e_1)$

- Grösste darstellbare Zahl:

$$(1 - B^{-1} \cdot B^{e_1}$$

- betragsmässig kleinste

$$\text{normalisierte Zahl: } \frac{1}{B} \cdot B^{e_0} = B^{e_0 - 1}$$

$$\text{darstellbare Zahl grösser Null: } B^{\cdot n} \cdot B^{e_0} = B^{e_0 - n}$$

Allgemeines:

- ungleichmässig Verteilt
- Dichte nimmt bei wachsender Zahlengrösse exponentiell ab
- Approximationsfehler bei grossen Zahlen entsprechend grösser

4.15 Newton-Verfahren

4.15.1 Lineare Gleichungssysteme

$$x_{k+1})F(x_k) = x_k - \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{4.37}$$

Konvergenzgeschwindigkeit

$$\lim_{x \to a} F'(x) \tag{4.38}$$

Konvergenzfaktor

$$F'(s) \qquad \text{mit} \qquad s: \text{Fixpunkt} \tag{4.39}$$

Konvergenzordnung

$$\begin{array}{llll} \text{linear} & F'(s) \neq 0 & \text{und} & |F'(s)| < 1 \\ \text{quadratisch} & F'(s) = 0 & \text{und} & F''(s) \neq 0 \\ \text{kubisch} & F''(s) = F's(s) = 0 & \text{und} & F''' \neq 0 \end{array}$$

4.15.2 Nichtlineare Gleichungssysteme

$$\underline{f} = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

$$J_f = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} \qquad \text{Jacobi-Matrix}$$

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k - J_f^{(-1)} \cdot f \qquad \text{mit} \quad \underline{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vereinfachung:} \quad \underline{h} = -J_f^{(-1)} \cdot f \quad \Longrightarrow \underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + \underline{h}$$

4.16 Apriori Fehlerabschätzung

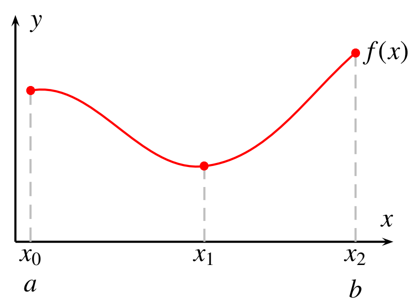
$$\|x_n - x_k\| \leq L^k < frac11 - L \cdot \|x_1 - x_0\| \tag{4.40}$$

$$k \geq \frac{\ln\left(\epsilon \cdot (1-L) \cdot \|x_1 - x_0\|^{-1}\right)}{\ln(L)} \tag{4.41}$$

4.17 Newton-Cotes-Regeln

Beispiel: Simpson

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) = \int\limits_a^b f(x)\,dx \tag{4.42}$$



$$h = x_1 - x_0$$

4.18 Gauss-Quadratur

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} w_k \cdot f(x) \tag{4.43}$$

Genauigkeitsgrad: 2n-1

$$f \equiv 1 \qquad \int\limits_a^b dx = b - a = \sum_{k=1}^{n} w_k$$

$$f \equiv x \qquad \int\limits_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} w_k \cdot x_k$$

$$f \equiv x^2 \qquad \int\limits_a^b x^2\,dx = \underbrace{\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}}_{\underline{b}} = \sum_{k=1}^{n} w_k \cdot x_k^2$$

Vandermode-Matrix

$$V \cdot \underline{w} = \underline{b} \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{w} = V^{-1} \cdot \underline{b} \qquad \text{falls} \quad \det(V) \neq 0 \tag{4.44}$$

4.19 Orthogonal-Polynome

Skalarprodukt:

$$(f, g) = \int_a^b w_{(x)} \cdot f_{(x)} \cdot g_{(x)} \, dx$$

Orthogonalpolynome $p_0, p_1, p_2, \ldots,$ usw.

$$\begin{aligned} p_0 &= 1 \\ p_1 &= x + a \\ p_2 &= x^2 + bx + c \\ &\vdots \\ \text{usw.} \end{aligned}$$

Bedingung:

$$\begin{aligned} (p_0, p_1) &= 0 \\ (p_0, p_2) &= 0 \\ (p_1, p_2) &= 0 \\ &\vdots \\ \text{usw.} \end{aligned}$$

Alle Orthogonalpolynome müssen gegenseitig Skalarmultipliziert 0 ergeben $\Longrightarrow$ Gleichungssystem in a, b, c, usw.

Teil II

Physik

Kapitel 5

Mechanik

5.1 Kinematik

5.1.1 Geschwindigkeit v

$$v = \frac{s}{t} \quad \left[\frac{m}{s}\right] \tag{5.1}$$

$$v_{(t)} = \frac{\delta s}{\delta t} \quad \left[\frac{m}{s}\right] \tag{5.2}$$

5.1.2 Beschleunigung a

Negative Beschleunigungen nennt man auch: **Verzögerung**.

$$a = \frac{v}{t} \quad \left[\frac{m}{s^2}\right] \tag{5.3}$$

$$a_{(t)} = \frac{\delta v}{\delta t} \quad \left[\frac{m}{s^2}\right] \tag{5.4}$$

Für $a = \text{const}$ git:

$$s_{(t)} = \frac{a}{2}(t - t_1)^2 + v1(t - t_1) + s_1 \quad [m] \tag{5.5}$$

$$v_{(t)} = a(t - t_1) + v_1 \quad \left[\frac{m}{s}\right] \tag{5.6}$$

Für $a_{(t)} = pt + q$ gilt:

$$v_{(t)} = \frac{p}{2}t^2 + q \cdot t + v_0 \quad \left[\frac{m}{s}\right] \tag{5.7}$$

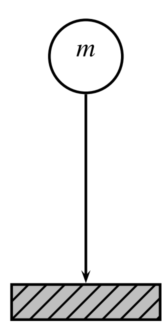
$$s_{(t)} = \frac{p}{6}t^3 + \frac{q}{2}t^2 + t \cdot v_0 + s_0 \quad [m] \tag{5.8}$$

Für $a_{(t)} = kt^n$ gilt:

$$v_{(t)} = \frac{k}{n+1}t^{n+1} + v_0 \quad \left[\frac{m}{s}\right] \tag{5.9}$$

$$s_{(t)} = \frac{k}{(n+1)(n+2)}t^{n+2} + t \cdot v_0 + s_0 \quad [m] \tag{5.10}$$

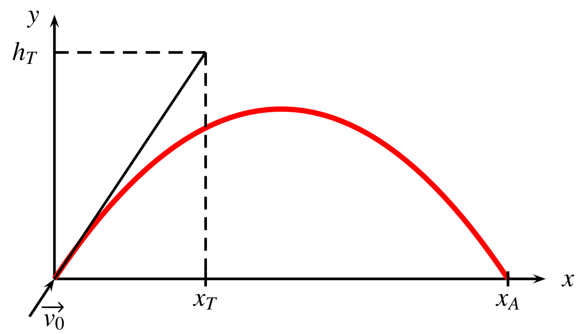
5.1.3 Freier Fall



$$t_{end} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad [s] \tag{5.11}$$

$$v_{(t)} = g \cdot t \quad \left[\frac{m}{s}\right] \tag{5.12}$$

5.1.4 Schiefer Wurf (ohne Reibung)



$$v_{x0} = ||\vec{v_0}|| \cdot \cos\alpha \quad \left[\frac{m}{s}\right] \tag{5.13}$$

$$v_{y0} = ||\vec{v_0}|| \cdot \sin\alpha \quad \left[\frac{m}{s}\right] \tag{5.14}$$

$$t_A = \frac{2 \cdot v_{y0}}{g} = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin\alpha}{g} \quad [s] \tag{5.15}$$

$$x_A = \frac{2}{g} \cdot {v_0}^2 \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha = {v_0}^2 \frac{\sin 2\alpha}{g} \quad [m] \tag{5.16}$$

$$t_T = \frac{x_T}{v_{x0}} = \frac{x_T}{v_0 \cdot \cos\alpha} \quad [s] \tag{5.17}$$

$$y_{T(x_T)} = -\frac{g}{2} \cdot \frac{{x_T}^2}{{v_{x0}}^2} + h_T \quad [m] \tag{5.18}$$

Bahnkurve:

$$y_{(x)} = -\frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{{v_{x0}}^2} + x \cdot \frac{v_{y0}}{v_{x0}} \quad [m] \tag{5.19}$$

Für horizontalen Abschuss:

$$y_{(x)} = -\frac{g}{2 \cdot {v_{x0}}^2} \cdot x^2 \quad [m] \tag{5.20}$$

5.1.5 Kreisbewegung $\phi_{(t)}$

Skalar:

$$\phi_{(t)} = \frac{b}{r} \quad [rad] \tag{5.21}$$

Vektor:

$$\vec{\phi_{(t)}} = \frac{b}{r} \cdot \frac{\vec{e}}{||\vec{e}||} \quad [rad] \tag{5.22}$$

5.1.6 Winkelgeschwindigkeit $\omega_{(t)}$

Skalar:

$$\omega_{(t)} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{t_2 - t_1} \quad \left[\frac{rad}{s}\right] \tag{5.23}$$

Vektor:

$$\vec{\omega_{(t)}} = \omega_{(t)} \cdot \hat{e} = \omega_{(t)} \cdot \frac{\vec{e}}{||\vec{e}||} \quad \left[\frac{rad}{s}\right] \tag{5.24}$$

5.1.7 Winkelbeschleunigung $\alpha_{(t)}$

$$\alpha_{(t)} = \frac{\delta\omega}{\delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} \quad \left[\frac{rad}{s^2}\right] \tag{5.25}$$

$$\vec{\alpha_{(t)}} = \alpha_{(t)} \cdot \hat{e} \tag{5.26}$$

$$s = r \cdot \phi \quad [m] \tag{5.27}$$

$$v_{tangential} = r \cdot \omega \quad \left[\frac{m}{s}\right] \tag{5.28}$$

$$a_{tangential} = r \cdot \alpha \quad \left[\frac{m}{s^2}\right] \tag{5.29}$$

5.1.8 Kreisförmige Bewegung (Gleichförmig)

Zentripedalbeschleunigung a_p zeit in Richrung Kreismittelpunkt:

$$\|\vec{a_p}\| = \omega^2 r \tag{5.30}$$

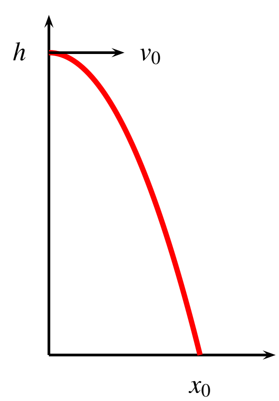
$$\vec{a_p} = -\omega^2 \vec{r} = -\frac{v^2}{r^2} \cdot \vec{r} \tag{5.31}$$

mit

$$\begin{aligned} &\omega && : \text{Kreisfrequenz} \\ \nu &= \frac{\omega}{2\pi} && : \text{lineare Frequenz} \\ T &= \frac{1}{\nu} && : \text{Periode} \end{aligned}$$

$$a_p = \omega^2 r = \frac{v_{tan}^2}{r} \qquad \Longrightarrow \qquad \omega = \frac{v_{tan}}{r}$$

5.1.9 Horizontaler Wasserstrahl



$$x_0 = \sqrt{\frac{2hv_0^2}{g}} \tag{5.32}$$

$$y = \frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2 \tag{5.33}$$

Krümmungsradius der Parabel in O

$$r = \frac{v_0^2}{g} \tag{5.34}$$

allgemein:

$$r = \frac{1}{2A} \qquad \text{Scheitelkrümmungsradius der Parabel} \tag{5.35}$$

5.2 Dynamik

5.2.1 Kraft

$$\overrightarrow{F} = m \cdot \overrightarrow{a} \quad [N] \tag{5.36}$$

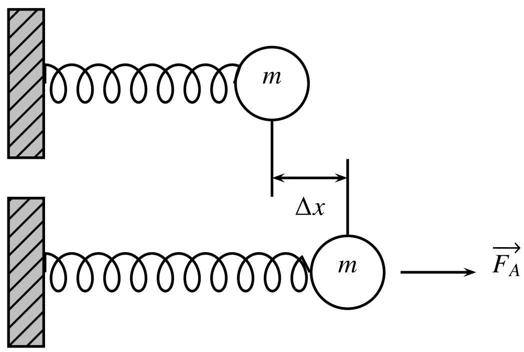
in der relativistischen Physik (wurde so von Newton formuliert):

$$\overrightarrow{F} = \frac{\Delta(m \cdot \overrightarrow{v})}{\Delta t} \tag{5.37}$$

5.2.2 Gravitation

$$F_s = m \cdot g \quad [N] \qquad \text{mit} \quad g = 9.81 \tag{5.38}$$

5.2.3 Federkraft



$$k \cdot \Delta x = F_A = -F_F \tag{5.39}$$

mit

k	: Federkonstante
F_A	: äussere Kraft
F_F	: Federkraft

5.2.4 Newton

Trägheitsgesetz

Massepunkt, auf den keine Kräfte wirken ist in Ruhe oder auf gleichförmiger, geradliniger Bewegung.

Definition der Kraft

$$\overrightarrow{F} = \frac{\Delta(m \cdot \overrightarrow{v})}{\Delta t} \qquad \text{mit} \quad m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{5.40}$$

5.2.5 Aktion / Reaktion

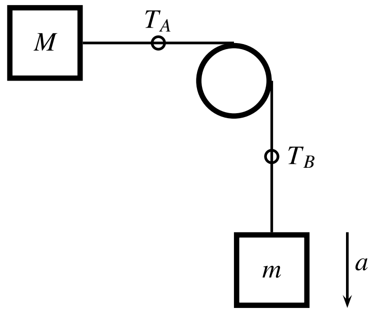
Kräfte, die zwei Körper aufeinander ausüben sind gleich:

$$F_{ij} = -F ji \qquad i \text{ übt Kraft auf } j \text{ aus} \tag{5.41}$$

5.2.6 D'Alembert'sches Gesetz

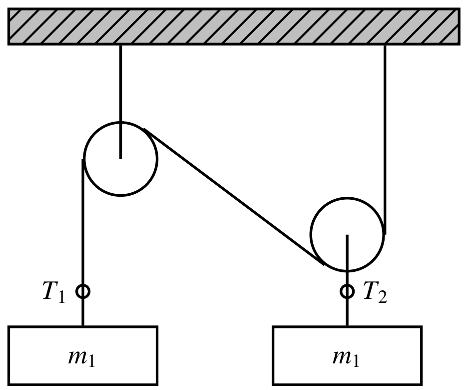
$$\sum F = 0 \tag{5.42}$$

5.2.7 "Freier Fall" mit Hemmung



$$a = \frac{m}{m+M} \cdot g \qquad T_B = m(g-a) \qquad T_A = \frac{mM}{m+M} \cdot g \tag{5.43}$$

5.2.8 Flaschenzug

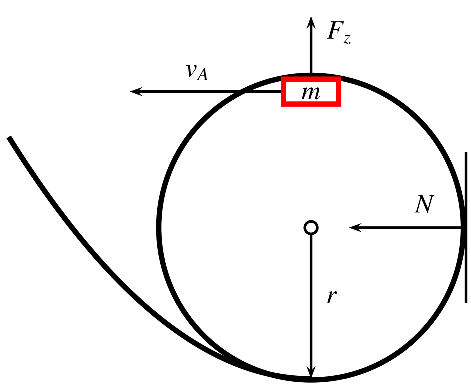


$$T_1 = m_1(g-a) \qquad \text{und} \qquad T_2 = m_2(g + \frac{a}{2}) \tag{5.44}$$

$$2T_1 = T_2 \tag{5.45}$$

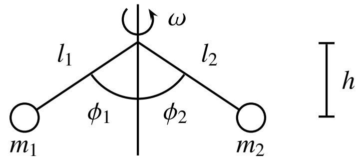
$$a = g \cdot \frac{m_1 - \frac{m_2}{2}}{m_1 + \frac{m_2}{4}} \tag{5.46}$$

5.2.9 Looping

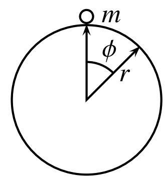


$$F_z = \frac{m \cdot v_A^2}{r} = m \cdot g + N \qquad \text{und} \quad v_A \text{ kritisch } (N=0) : v_A = \sqrt{gr} \tag{5.47}$$

5.2.10 Zentrifugalkraft



$$h = \frac{g}{\omega^2} \qquad 1 \geq cos(\phi_2) = \frac{g}{\omega^2 \cdot l_2} \quad \rightarrow \quad \omega_i \geq \sqrt{\frac{g}{l_i}} \tag{5.48}$$



$$F_p = m \cdot a_p \qquad \text{mit} \quad a_p = \omega^2 \cdot r \qquad \text{und} \quad \omega = \frac{\phi}{t} \tag{5.49}$$

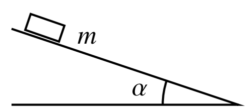
Es gilt auch: $\overrightarrow{F}_{zentripetal} = -\overrightarrow{F}_{zentrifugal}$

5.2.11 Reibungskoeffizient μ

Haftreibungskoeffizient μ_H

$$\|\overrightarrow{N}\| \cdot \mu_H = \|\overrightarrow{R}_{max}\| \qquad \text{mit} \quad \overrightarrow{N}: \text{Normalkraft} \qquad \overrightarrow{R}: \text{Reibungskraft} \tag{5.50}$$

$$\mu_H = \frac{\|\overrightarrow{R}_{max}\|}{\|\overrightarrow{N}\|} = tan(\alpha_{kritisch})$$

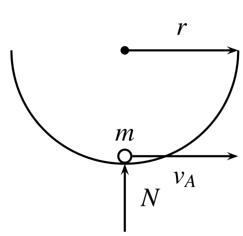


Gleitreibungskoeffizient μ_G

$$\mu_G < \mu_H \qquad \text{nicht Geschwindigkeitsabhängig!}$$

Stahl-Stahl: $\mu_H = 0.15 \quad \mu_G = 0.12$

5.2.12 Kugel in Mulde



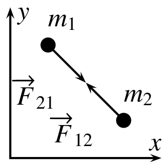
$$N = m\left(g + \frac{v_A^2}{r}\right) \tag{5.51}$$

5.2.13 Gravitation

Universelle Gravitationskonstante G

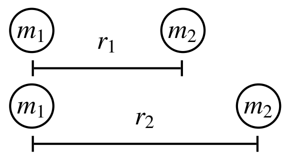
$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \quad \left[\frac{N \cdot m}{kg^2}\right] \tag{5.52}$$

5.2.14 Anziehung von Punktmassen



(F_{ij} : i übt auf j Kraft F aus)

$$F = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2} \qquad \text{mit} \quad r : \text{Abstand der Punkte} \tag{5.53}$$



$\frac{F_1}{F_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$

Punktmasse ausserhalb Kugelmasse

Zentralsymmetrische Kugelmassenverteilung $\rho = m \cdot V^{-1}$. Masse kann als Punkt im Zentrum angenommen werden.

5.2.15 Zusammenhang zwischen g und G

$$\rho_{Erde} = \frac{3 \cdot g}{G \cdot 4 \cdot \pi \cdot r} \qquad g = \frac{M \cdot G}{r^2} \tag{5.54}$$

Umlaufzeit

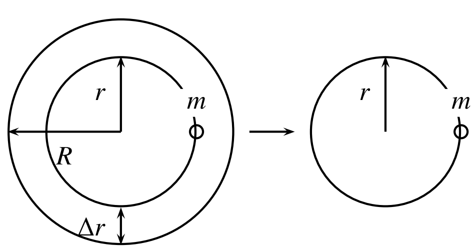
$$M_{Sonne} >> m_{Planet} \qquad \frac{G \cdot M_{Sonne}}{4 \cdot \pi^2} = \frac{r^3}{T^2} \tag{5.55}$$

3. Kepler'sches Gesetz

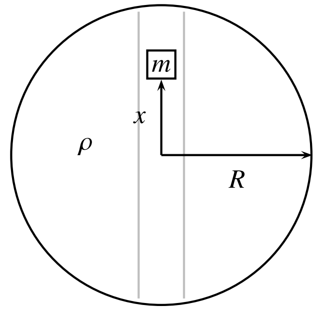
$$\frac{T^2}{r^3} \text{ ist konstant} \qquad \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} \tag{5.56}$$

Punktmasse innerhalb Kugelmasse

(Zentralsymmetrische Dichteverteilung)
Eine Kugelschale mit konstanter Dichte ρ übt auf eine Masse m, die sich innerhalb dieser Kugelschale befindet *keine* Gravitationskraft aus.

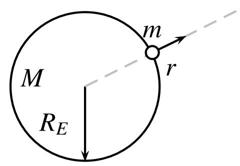


Erde mit Kanal



$$a(t) = -\frac{4}{3}\pi \cdot G \cdot \rho \cdot x(t) \tag{5.57}$$

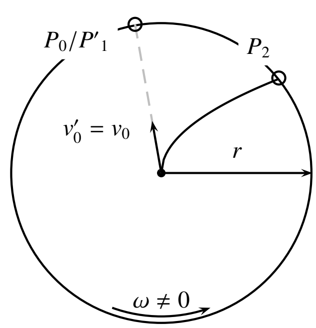
Flucht von der Erde



$$a(r) = -g \cdot \frac{R_E^2}{r^2} \qquad \text{mit} \quad g = \frac{G \cdot M}{R_E^2} \tag{5.58}$$

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot R_E} \tag{5.59}$$

Coriolis-Kraft



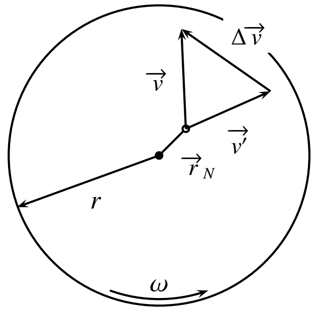
$$b_c = 2 \cdot v_0' \cdot \omega$$
$$F_c = m \cdot b_c$$

mit

b_c : Coriolis-Beschleunigung
F_c : Coriolis-Kraft

$$\overrightarrow{F}_c = m \cdot \overrightarrow{b}_c = 2 \cdot m \cdot \left(\overrightarrow{v'} \times \overrightarrow{\omega}\right)$$
$$\overrightarrow{b}_c = 2 \cdot \overrightarrow{v'} \times \overrightarrow{\omega}$$

Geschwindigkeit im rot. System



$$\Delta\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}_N \tag{5.60}$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}_N \tag{5.61}$$

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{r}_N \tag{5.62}$$

Beschleunigungen im rot. System

$$\vec{b}' = \vec{b} + 2\vec{v}' \times \vec{\omega} + \omega^2 \cdot \vec{r}_N \tag{5.63}$$

Alle “Strich”-Grössen sidn die des Plattenbewohners.

5.2.16 Arbeit W

$$W \quad \left[J = \frac{kg \cdot m^2}{s^2} = Nm = Ws\right] \tag{5.64}$$

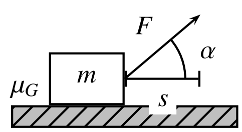
$$\Delta W = \Delta\vec{s} \circ \Delta\vec{F}_{(s)} = \|\Delta\vec{F}_{(s)}\| \cdot \|\Delta\vec{s}\| \cdot \cos(\alpha)$$

$$W = m \cdot v^2 \cdot \frac{1}{2}$$

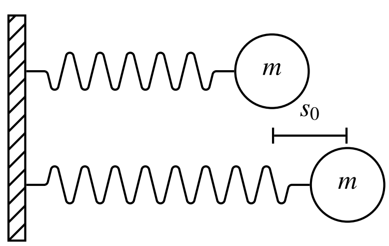
Ziehen eines Schlittens

$$W = s \cdot \mu_G\,(m \cdot g - F \cdot \sin(\alpha))$$

$$F \cdot \cos(\alpha) = \mu_G\,(m \cdot g - F \cdot \sin(\alpha))$$



Feder mit Federkonstante k



$$W = k \cdot \frac{s_0^2}{2} \tag{5.65}$$

5.2.17 Leistung P

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad [W] \qquad 1PS = 746W \tag{5.66}$$

5.2.18 Energie E

Energie ist das Vermögen Arbeit zu leisten: $E \quad [J]$

Energieerhaltungssatz

$$E_{\text{vorher}} = E_{\text{nachher}} \tag{5.67}$$

Potentielle Energie

$$E_L = E_{Pot} = m \cdot g \cdot h \tag{5.68}$$

Reversible Deformationsenergie

$$E_D = \frac{1}{2} \cdot k \cdot s_0^2 \tag{5.69}$$

(potientielle Energie)

Kinetische Energie

$$E_K = E_{Kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \tag{5.70}$$

Wärme-Energie

$$E_{reib} = \mu_G \cdot N \cdot s \tag{5.71}$$

(kann weder direkt noch vollständig zurückgewonnen werden)

Energie der Masse (Einstein)

$$E = m \cdot c^2 \qquad \text{mit} \quad c = 3 \cdot 10^8 \quad \left[\frac{m}{s}\right] \tag{5.72}$$

$$m_{(v)} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{mit} \quad m_0 : \text{Ruhemasse} \tag{5.73}$$

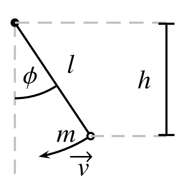
Rotationsenergie

$$E_{K,R} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \tag{5.74}$$

$$I = \sum r_{N_i}^2 \cdot \Delta m_i \qquad r_{N_i} \text{ ist normal zu ausgezeichneten Achse} \tag{5.75}$$

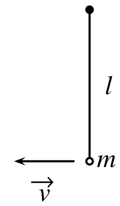
I	
Kugel	$\frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2$
Stab (Drehachse in der Mitte der Längsachse)	$\frac{1}{12} \cdot m \cdot l^2$
Stab (Drehachse an einem Ende)	$\frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2$
Vollzylinder (Drehachse in Längsachse)	$\frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2$
Hohlzylinder (Drehachse in Längsachse)	$m \cdot R^2$

5.2.19 Mathematisches Pendel



Annahme: $\phi << \frac{\pi}{2}$ so dass $\sin(\phi) \approx \phi \Longrightarrow \alpha = -\frac{g}{l} \cdot \phi$ (harmonischer Oszillator)

$$\omega^2 + \frac{g}{l} \cdot \phi^2 = \frac{2 \cdot E}{l^2 \cdot m} \qquad \text{mit} \quad \phi << \frac{\pi}{2} \tag{5.76}$$



$$\phi(t) = \phi_{max} \cdot \sin(\Omega t)$$
$$\omega(t) = \Omega \cdot \phi_{max} \cdot \cos(\Omega t)$$

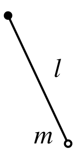
mit

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Bemerkung

$$\ddot{y} = -\lambda \cdot y \qquad \text{z.B. Feder:} \quad \lambda = \frac{k}{m} \tag{5.77}$$

Pendeluhr



$$T^{-1} = \nu = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{g}{l}}}{2\pi} \tag{5.78}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \tag{5.79}$$

Lösung der Bewegungsgleichung mit Anfangsbedingung:

$$\phi(0) = \phi_{max} \qquad \omega(0) = 0$$

$$\phi_{(t)} = \phi_{max} \cdot \cos(\Omega t)$$
$$\omega_{(t)} = -\Omega \cdot \phi_{max} \cdot \sin(\Omega t)$$
$$\alpha_{(t)} = -\Omega^2 \cdot \phi_{max} \cdot \cos(\Omega t) \qquad \text{wobei} \quad \Omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

5.2.20 System von Massepunkten

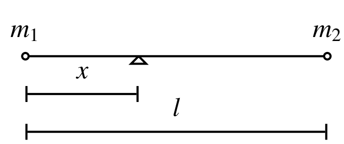
Gleichgewicht

$$\sum \vec{F}_{\text{äussere}} = 0 \tag{5.80}$$

Drehmoment

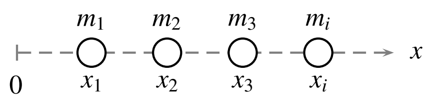
$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \text{Drehmoment bezüglich eines bel. Punktes} \tag{5.81}$$

$$\sum \vec{T}_i = \sum \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i \right) = 0 \qquad \text{2. Bedingung für Gleichgewicht} \tag{5.82}$$



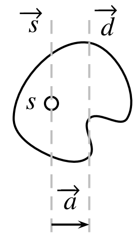
$$x = \frac{l \cdot m_2}{m_1 + m_2} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{System im Gleichgewicht}$$

Schwerpunkt



$$M \cdot x_s = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot x_i \qquad M = \sum_{i=1}^{N} m_i \tag{5.83}$$

Satz von Steiner



I_s : Trägheitsmoment bezüglich $\vec{s}$

I_d : Trägheitsmoment bezüglich $\vec{d}$

$$I_d = I_s + M \cdot a^2 \tag{5.84}$$

Schwerpunktsatz

Der Schwerpunkt in einem System von Massepunkten bewegt sich als ob in ihm die ganz Massenkonzentration wäre, und sämtliche äusseren Kräfte an ihm angreifen würden.

5.2.21 Impuls

Definition

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \qquad \left[\frac{kg \cdot m}{s}\right] \tag{5.85}$$

Zusammenhang mit E_{Kin}

$$E_{Kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \vec{v} = \frac{p^2}{2 \cdot m} \tag{5.86}$$

Zusammenhang mit 2. Newton'schen Gesetz

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \vec{F} \tag{5.87}$$

5.2.22 Impulserhaltung

Für 2 Massepunkte

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{ konstant} \tag{5.88}$$

$$\vec{p}_{total} = \sum \vec{p}_i \tag{5.89}$$

Für n Massepunkte

$$\frac{\partial \vec{p}_{total}}{\partial t} = \vec{F}_{total} \tag{5.90}$$

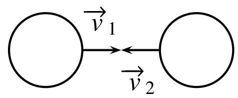
$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_i \vec{p}_i = \sum_j \vec{F}_j \tag{5.91}$$

$\vec{F}_{total}$ und $\vec{F}_i$ als äussere Kräfte.

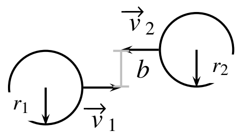
Arten von Impulserhaltung

1. *Unelastisch*: Körper sind zusammen
2. *Inelastisch*: Körper sind deformiert, Oszillation
3. *Elastisch*: Kein Energieverlust, **existiert nicht!**

Stossparameter b



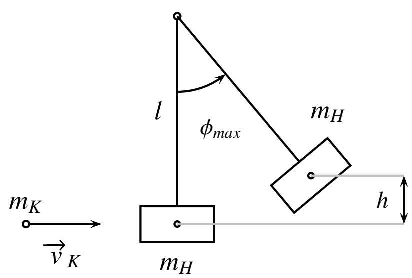
gerader zentraler Stoss $b = 0$



gerader nicht zentraler Stoss $b > 0$

$$
\begin{aligned}
r_1 + r_2 < b \quad &\rightarrow \quad \text{kein Stoss} \\
r_1 + r_2 \geq b \quad &\rightarrow \quad \text{Stoss der Art } 1 \ldots 3
\end{aligned}
$$

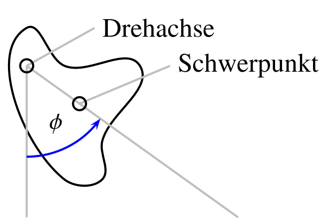
5.2.23 Ballistisches Pendel



$$
\begin{aligned}
\text{Impulserhaltung:} \quad & m_K \cdot v_K = v_H(m_K + m_H) \\
\text{Energieerhaltung:} \quad & \frac{1}{2}(m_K + m_H) \cdot v_H^2 = g \cdot h \cdot (m_K + m_H)
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \qquad v_K = \frac{m_K + m_H}{m_K} \cdot \sqrt{2 \cdot l \cdot g \cdot (1 - \cos(\phi_{max}))} \tag{5.92}
$$

5.2.24 Physikalisches Pendel



$$
\begin{aligned}
I_{K,D} &= I_{K,S} + l^2 \cdot m \\
-l \cdot m \cdot g \cdot \sin(\phi) &= I_{K,D} \cdot \phi
\end{aligned} \tag{5.93}
$$

Für kleine Ausschläge: $\sin(\phi) = \phi$

$$\Longrightarrow \qquad f = -\frac{l \cdot m \cdot g}{I_{K,S} + m \cdot l^2} \cdot \phi$$

$$\phi_{(t)} = \phi_0 \cdot \cos(\omega t) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{l \cdot m \cdot g}{I_{K,S} + m \cdot l^2}}$$

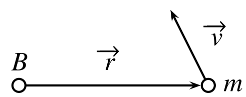
$$T = \tau = 2\pi \sqrt{\frac{I_{K,S} + m \cdot l^2}{l \cdot m \cdot g}}$$

5.2.25 Drehimpuls / Drall

Definition

Mit fixer Drehachse:

$$\overrightarrow{L}_{\parallel} = I \cdot \overrightarrow{\omega} \qquad \text{Drehachse parallel zu } \overrightarrow{L}_{\parallel} \tag{5.94}$$



$$\overrightarrow{L} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{p} \qquad \text{mit} \quad \overrightarrow{p} = m \cdot \overrightarrow{v} \tag{5.95}$$

$$\overrightarrow{L} = \sum_i \overrightarrow{r}_i \times \overrightarrow{p}_i = \sum_i \overrightarrow{L}_i \tag{5.96}$$

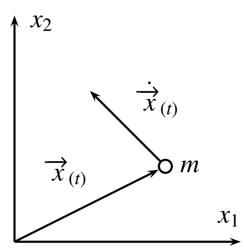
Drehimpulserhaltung

Analog zu $\frac{\partial \overrightarrow{p}}{\partial t} = \overrightarrow{F}$

$$\frac{\partial \overrightarrow{L}}{\partial t} = \overrightarrow{T} \tag{5.97}$$

$$\overrightarrow{L} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{p}$$
$$\overrightarrow{T} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}$$

Zentralproblem



$$m \cdot \ddot{\overrightarrow{x}} = \frac{\overrightarrow{x}}{\|\overrightarrow{x}\|} \cdot f\left(\|\overrightarrow{x}\|\right) \tag{5.98}$$

$$\begin{aligned} f < 0 \quad &\rightarrow \quad \text{Anziehung} \\ f > 0 \quad &\rightarrow \quad \text{Abstossung} \end{aligned}$$

Kapitel 6

Hydromechanik

6.1 Definitionen

6.1.1 Hydrostatik

Lehre vom Kräftegleichgewicht in ruhenden Flüssigkeiten.

6.1.2 Hydrodynamik

Lehre vom Strömungsgesetzen in bewegten Flüssigkeiten.

6.1.3 Dichte ρ

$$\rho = \frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}} = \frac{\partial M}{\partial V} \quad \left[\frac{kg}{m^3}\right] \tag{6.1}$$

6.1.4 Spezifisches Gewicht γ

$$\gamma = \frac{\text{Gewicht}}{\text{Volumen}} = \frac{\partial G}{\partial V} = \frac{\partial m \cdot g}{\partial V} \quad \left[\frac{N}{m^3}\right] \tag{6.2}$$

$$\gamma = g \cdot \rho \tag{6.3}$$

6.1.5 Druck p

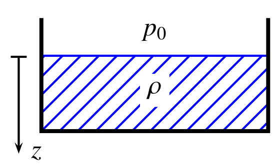
$$p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} = \frac{\partial F_N}{\partial A} \tag{6.4}$$

Einheiten des Druckes

$$\begin{aligned}
1Pa &= 1\frac{N}{m^2} \qquad \text{(Pascal)}\\
1bar &= 10^5 Pa\\
1atm &= 1.01325 bar \qquad \text{(Normaldruck auf Meereshöhe)}\\
&= 760 mmHg\\
1torr &= 1mmHg \quad (0^\circ C)\\
&= 1.3332 \cdot 10^2 Pa\\
1at &= 10 mH_2O \quad (\text{bei } 4^\circ C)\\
&= \frac{kp}{cm^2}
\end{aligned}$$

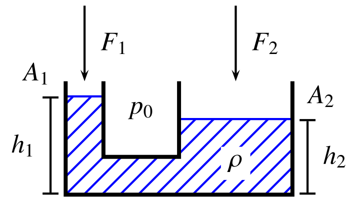
6.2 Druck

6.2.1 Schweredruck



$$p_{(z)} = \frac{\partial F}{\partial A} = p_0 + \rho \cdot g \cdot z \tag{6.5}$$

6.2.2 Hydrostatische Übersetzung



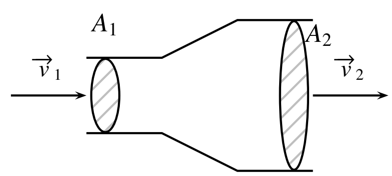
$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{F_2}{F_1} + \frac{A_2}{A_1} \cdot \rho \cdot g \cdot (h_2 - h_1) \tag{6.6}$$

6.2.3 Auftrieb F_A (Archimedes)

Der Auftrieb F_A ist dem Betrag nach gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit. Die Luft kann eigentlich vernachlässigt werden.

- $\overrightarrow{F}_A$ ist parallel zum vorhandenen Beschleunigungsfeld (im Allgemeinen $\overrightarrow{g}$).
- Angriffspunkt von F_A ist der Schwerpunkt der **verdrängten Flüssigkeit**.

6.2.4 Bernoulli



$$v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{v_1}{v_2} = \frac{A_2}{A_1} \tag{6.7}$$

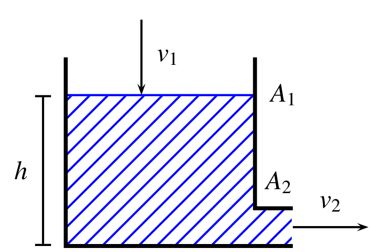
$$p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 + \rho \cdot h_1 \cdot g = p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 + \rho \cdot h_2 \cdot g \tag{6.8}$$

Gilt nur für eine Stromlinie einer inkompressiblen Flüssigkeit.
Erklärung:

$$\underbrace{p_1}_{\text{Betriebsdruck}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2}_{\text{dyn. Druck, Staudruck}} + \underbrace{\rho \cdot h \cdot g}_{\text{Schweredruck}}$$

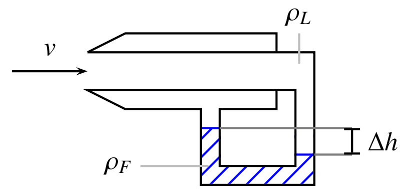
wobei: *Betriebsdruck+Schweredruck=Statischer Druck*

6.2.5 Ausflussgeschwindigkeit



$$\frac{A_1}{A_2} >> 1 \qquad \text{das heisst} \quad v_1 \rightarrow 0 \qquad \Longrightarrow \qquad v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \tag{6.9}$$

6.2.6 Pitot-Rohr



$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot \rho_F \cdot \Delta h}{\rho_L}} \tag{6.10}$$

6.3 Widerstand

6.3.1 Reibungswiderstand

Der Reibungswiderstand is proportional zur Geschwindigkeit.

$$F_r = 6 \cdot \pi \cdot r \cdot v \cdot \eta \tag{6.11}$$

$$\eta \quad \left[N \cdot \frac{s}{m} = \frac{kg}{m \cdot s}\right] \qquad : \text{Viskosität}$$
$$\eta_{\text{Luft}} = 1.8 \cdot 10^{-5} \quad \left[\frac{kg}{m \cdot s}\right]$$

Beispiel: Regentropfen

v_0 : stationäre Fallgeschwindigkeit

$$v_0 = \frac{2 \cdot r^2 \cdot g \cdot (\rho_{\text{Wasser}} - \rho_{\text{Luft}})}{9 \cdot \eta_{\text{Luft}}}$$

6.3.2 Druckwiderstand

Dominant bei turbulenter Strömung

$$F_D = c_D \cdot A \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \tag{6.12}$$

A : Querschnitt bezüglich Bewegungsrichtung
c_D : Druckwiderstandsbeiwert, Fummelfaktor
ρ : Dichte des Mediums

6.3.3 Gesamtwiderstand

$$F_W = F_r + F_D \qquad \Longrightarrow \qquad F_W = c_W \cdot A \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \tag{6.13}$$

c_W : Widerstandsbeiwert, Abhängig von der Geschwindigkeit. Konstant wenn $F_r << F_D$

(gelten für Reynolds $\approx 7 \cdot 10^4$)

6.3.4 Reynod'sche Zahl

$$Re = \frac{\hat{l} \cdot \rho \cdot v}{\eta} \tag{6.14}$$

mit

$\hat{l} = \frac{4 \cdot A}{u}$: charakteristische Grösse, hydrodynamischer Durchmesser

u : Umfang

$Re_{krtitisch} \approx 2300$

Kapitel 7

Wärmelehre

7.1 Definitionen

7.1.1 Wärmemenge Q

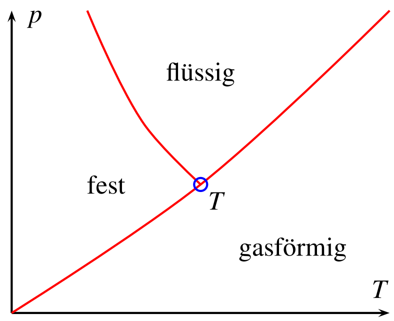
$$\dot{Q} = P \qquad \Delta Q = P \cdot \Delta t \tag{7.1}$$

Bremswärme:

$$\Delta Q = F_R \cdot s = m \cdot g \cdot \mu_G \cdot s = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

7.1.2 Trippelpunkt

Trippelpunkt von H_2O: $273.16K$, $0.0076°C$ und $4.6mmHg$
Im Trippelpunkt herrscht Koexistenz von festem, flüssigem und gasförmigem Zustand.



(die Grafik sieht für jeden Stoff anders aus)

7.1.3 Spezifische Wärme

$$\Delta Q^{\swarrow} = c \cdot m \cdot \Delta T \tag{7.2}$$

$$\begin{array}{rcl} \Delta Q^{\swarrow} & [J] & \text{: dem System zugeführte Wärmeenergie} \\ c = \dfrac{1}{m} \cdot \dfrac{\partial Q^{\swarrow}}{\partial t} & \left[\dfrac{J}{kg \cdot K}\right] & \text{: spezifische Wärme} \\ \Delta T & [K] & \text{: Temperaturänderung} \end{array}$$

Stoff	c
Wasser	4182
Eis	2100
Eisen	465
Aluminium	896

7.1.4 Kalorie

$1cal$: Wärmemenge um $1ml$ Wasser von $14.5°C$ auf $15.5°C$ zu erwärmen.
$1kcal = 4185.5J$

7.1.5 Mischen

$$T_0 = \frac{c_1 \cdot m_1 \cdot T_1 + c_2 \cdot m_2 \cdot T_2}{c_1 \cdot m_1 + c_2 \cdot m_2} \tag{7.3}$$

$$\begin{array}{rl} c_i & \text{: spezifische Wärme} \\ m_i & \text{: Masse} \\ T_i & \text{: abs. Temperatur (in } K\text{)} \end{array}$$

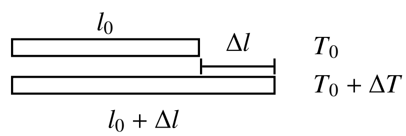
7.1.6 Spezifische Wärme für Gase

$$c_p = \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial Q}{\partial T} \qquad \text{für } p = \text{konstant} \tag{7.4}$$

$$c_V = \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial Q}{\partial T} \qquad \text{für } V = \text{konstant} \tag{7.5}$$

$$c_p > c_V \tag{7.6}$$

7.1.7 Längenausdehnung



$$\Delta l = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta T \tag{7.7}$$

$$l = l_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T) \tag{7.8}$$

7.1.8 Volumenausdehnung

$$V = V_0 \cdot (1 + \gamma \cdot \Delta T) \qquad \text{mit} \quad \gamma \approx 3 \cdot \alpha \tag{7.9}$$

$$V = l^3 = l_0^3 (1 + \alpha \cdot \Delta T)^3 \qquad \text{Annahme: } \alpha \cdot \Delta T << 1 \qquad \Longrightarrow \qquad V = V_0(1 + 3\alpha \cdot \Delta T) \tag{7.10}$$

7.1.9 Ideales Gas

Isobar: p konstant (Gay Lussac)

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \tag{7.11}$$

Isochor: V konstant (Amonton)

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \tag{7.12}$$

Isotherm: T konstant (Boyle Mariotte)

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_1}{V_2} \tag{7.13}$$

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{p_2}{\rho_2} \tag{7.14}$$

Verkettung

$$\frac{V_1 \cdot p_1}{T_1} = \text{konstant} \tag{7.15}$$

7.1.10 Stoffmenge in *kmol*

Die Lochmidt'sche Zahl L ist gleich der Anzahl der Atome in $12kgC_6^{12}$ (6 Protonen, 6 Neutronen, 6 Elektronen, Bindungsenergie):

$$L = 6.023 \cdot 10^{26}$$

$$m = n \cdot M$$

m : Masse
n : Anzahl *kmol*
M : Masse eines *kmol*

Molekül	M
C_6^{12}	12
H^1	1
^1He	4
H_2O	18
Luft (N_2, O_2)	29

7.1.11 Zustandsgleichung

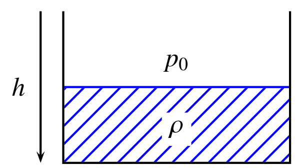
$$p \cdot V = n \cdot R_M \cdot T \tag{7.16}$$

T : absolute Temperatur
V : Volumen
n : Anazahl $kmol$
p : Druck
R_M : molare Gaskonstante $= 8.314 \cdot 10^3 \quad \left[\frac{J}{kmol \cdot K}\right]$

R_M ist Gasartunabhängig

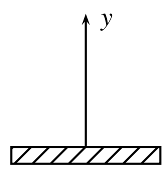
$$p = \rho \cdot R \cdot T \qquad \text{und} \quad p \cdot V = m \cdot R \cdot T \qquad \text{mit} \quad R = \frac{R_M}{M}$$

7.1.12 Luftdruckabnahme in Atmosphäre



$$p_{(h)} = \rho \cdot g \cdot h + p_0 \tag{7.17}$$

$$dp = \rho \cdot g \cdot dh \qquad \text{auch gültig wenn } \rho_{(h)} \tag{7.18}$$



$$dp = -\rho_{(y)} \cdot g \cdot dy \tag{7.19}$$

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{p}{R \cdot T} \cdot g \tag{7.20}$$

$$p_{(y)} = p_0 \cdot e^{-\frac{g}{R \cdot T} \cdot y} \qquad T \text{ konstant für alle } y \text{ (gute Näherung)} \tag{7.21}$$

$$p_{(y)} = \rho_0 \cdot R \cdot T_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0 \cdot g \cdot y}{p_0}} \tag{7.22}$$

7.2 Kinetische Gastheorie

7.2.1 Gas aus n Molekülen (Punktmassen)

Kinetische Energie eines Teilchens:

$$E_i = \frac{\mu_i}{2} \cdot v_i^2$$

mit μ_i als Masse eines Teilchens.

$$p_i = \frac{\mu \cdot \left\|\vec{v}_i\right\|^2}{V} \tag{7.23}$$

$N = n \cdot L$ für n *kmol* eines Gases

$$p_{total} = \frac{N \cdot \mu}{3 \cdot V} \cdot \overline{v^2} \tag{7.24}$$

Mittlere kinetische Energie eines Teilchens:

$$E = \frac{3}{2} \cdot k_B \cdot T \qquad \text{mit} \quad k_B = \frac{R_M}{L} \tag{7.25}$$

k_B : Boltzmenn'sche Konstante

$$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \quad \left[\frac{J}{K}\right]$$

7.2.2 Mehratomige Moleküle

Jeder zusätzliche Freiheitsgrad liefert $\frac{1}{2} k_B T$ kinetische Energie = *Aquipartitionsgesetz*

$$E_{kin} = \frac{f}{2} \cdot k_B \cdot T = \frac{f}{2} \cdot \frac{R_M}{L} \cdot T \tag{7.26}$$

f : Freiheitsgrade	Anzahl Atome
3	1
5	2
6	> 2

7.2.3 Innere Energie U eines Gases

$$U = n \cdot L \cdot E_{kin} \tag{7.27}$$
$$= n \cdot L \cdot \frac{f}{2} \cdot k_B \cdot T \tag{7.28}$$
$$= n \cdot R_M \cdot \frac{f}{2} \cdot T \tag{7.29}$$
$$= \frac{f}{2} \cdot p \cdot V \tag{7.30}$$

7.2.4 Gasgemische

$$M = \frac{n_1 \cdot M_1 + n_2 \cdot M_2}{n_1 + n_2} \tag{7.31}$$

7.2.5 Gesetz von Dalton

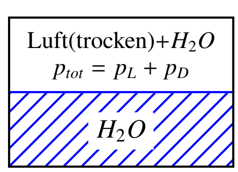
Der Druck eines Gasgemisches ist gleich der Summe der Partialdrücke:

$$p = (\rho_1 \cdot R_1 + \rho_2 \cdot R_2) \cdot T \tag{7.32}$$
$$p = (\rho_1 + \rho_2) \cdot \overline{R} \cdot T \tag{7.33}$$

mit

$$\overline{R} = \frac{R_M}{\overline{M}} \qquad \text{und} \qquad \overline{M} = \frac{n_1 \cdot M_1 + n_2 \cdot M_2}{n_1 + n_2} = \frac{\sum_i n_i \cdot M_i}{\sum_i n_i}$$

7.2.6 Relative Feuchtigkeit ϕ



p_L : Druck trockener Luft

p_D : Dampfdruck

Nach Dalton: $p_f = p_L + p_D$ (p_f : feuchte Luft)
Relative Feuchtigkeit $\phi(T)$:

$$0 \leq \phi(T) = \frac{p_D}{p_s(T)} \leq 1 \tag{7.34}$$

p_s : Sättigungsdruck, H_2O:

$$\begin{aligned} p_s(0°) &= 611 Pa \\ p_s(20°) &= 2357 Pa \\ p_s(100°) &= 1.01325 \cdot 10^5 Pa = 1 atm \end{aligned}$$

7.3 Thermodynamik

7.3.1 1. Hauptsatz

$$\begin{aligned} Q^{\nearrow} &: \text{die vom System an die Umgebung abgegebene Wärme} \\ Q^{\swarrow} &: \text{die vom System von der Umgebung aufgenommene Wärme} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad Q^{\nearrow} = -Q^{\swarrow} \tag{7.35}$$

dito für W: $W^{\nearrow} = -W^{\swarrow}$

$$\Delta U = Q^{\swarrow} + W^{\swarrow}$$

Die vom System aufgenommene Wärme $Q^{\swarrow}$ und Arbeit $W^{\swarrow}$ erhöht die innere Energie U des Systems um ΔU.

Isochor

$$C_V = \frac{1}{2} f \cdot R_M$$

- Gasart unabhängig
- Atomgewichtsunaghängig

Isobar

$$\begin{aligned} C_p &= \frac{f}{2} \cdot R_M + R_M \\ &= R_M \left(1 + \frac{f}{2}\right) \\ &= C_V + R_M \\ f &= \{3, 5, 6\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & C_p > C_V \\ \Delta U = n \cdot C_V \cdot \Delta T & \qquad \Delta U \neq n \cdot C_p \cdot \Delta T \\ c_p = \frac{C_P}{M} & \qquad c_V = \frac{C_V}{M} \\ C_p = C_V + R_M & \qquad c_p = c_V + R \end{aligned}$$

7.3.2 Adiabatische (isentrope) Prozesse

Dies sind Zustandsänderungen mit $\Delta Q = 0$. Es gilt immer noch: $pV = nR_M T$

$$\chi = \frac{c_p}{c_V} = \frac{C_p}{C_V} = \frac{C_V + R_M}{C_V} = 1 + \frac{R_M}{C_V} \qquad \text{mit} \quad C_V = \frac{f}{2} \cdot R_M \tag{7.36}$$

$$\chi = 1 + \frac{2}{f} \tag{7.37}$$

$$T_1 \cdot V_1^{\chi-1} = T_2 \cdot V_2^{\chi-1} \qquad \text{dabei} \qquad T \cdot V^{\chi-1} = \text{ konstant}$$
$$p_1 \to p_2 \quad : \text{Berechnung mit } pV = nR_M T$$
$$T \cdot p^{\frac{1-\chi}{\chi}} = \text{ konstant} \qquad (V_1 = V_2)$$
$$p \cdot V^{\chi} = \text{ konstant} \qquad (T_1 = T_2)$$

Bemerkungen

- Streng adiabatische Wände gibt es nicht.
- Grosse Systeme → kleine Oberflächen (⇒ adiabatisch)
- Schnelle Zustandsänderungen (Beispiel: Kolbenmotor)
- Schallgeschwindigkeit:
$$c_{Gas} = \sqrt{\chi \cdot R \cdot T}$$
  Die Abhänigkeit ist für $\overline{V}^2_{Gas}$ und C^2_{Gas} die Gleiche.

7.3.3 Kreisprozesse

Rechtsläufiger Kreisprozess gibt Arbeit an Umwelt ab.

$$W^{\nearrow} = \oint p\, dV = \oint dW > 0 Q^{\swarrow}_{zykl.} = W^{\nearrow}_{zykl.} \tag{7.38}$$

7.3.4 2. Hauptsatz

Ohne Aufwendung von äusserer Arbeit strömt Wärme niemals von einem kälteren zu einem wärmeren Niveau.

7.3.5 Carnot-Zyklus

Dies ist ein idealer, reversibler Zyklus.

7.3.6 Wärme-Kraft-Maschine

Die Fläche unter $\oint$ ist positiv. Rechtsläufiger Kreisprozess. Q fliesst von Warm nach Kalt.

7.3.7 Thermodynamischer Wirkungsgrad

$$\eta_{th} = \frac{Q_3^{\swarrow} - Q_1^{\nearrow}}{Q_3^{\swarrow}} = 1 - \frac{Q_1^{\nearrow}}{Q_3^{\swarrow}} \tag{7.39}$$

Für nur reversible Prozesse gilt zusätzlich:

$$\eta_c = \eta_{ideal} = \eta_{rev.} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \tag{7.40}$$

7.3.8 Arbeitsmaschine, Wärmepumpe

Linksläufiger Kreisprozsess. Fläche unter $\oint$ ist positiv. Q fliesst von Kalt nach Warm unter Zuführung von äusserer Arbeit.

7.3.9 Leistungszahl COP

(COP = coefficient of performance)

$$\epsilon_W = \frac{Q_3^{\nearrow}}{Q_3^{\nearrow} - Q_1^{\swarrow}} = \frac{1}{1 - \frac{Q_1^{\swarrow}}{Q_3^{\nearrow}}} = \frac{1}{\eta_{th}} \tag{7.41}$$

Für reversible Prozesse gilt zusätzlich:

$$\epsilon_W = \frac{1}{\eta_c} = \frac{T_3}{T_3 - T_1} \tag{7.42}$$

7.4 Wärmeleitung

λ : Wärmeleitungszahl
Wärmeleitungsgleichung nach Fourier:

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{dT}{dx} \qquad \lambda \quad \left[\frac{W}{m \cdot K}\right] \tag{7.43}$$

A : Querschnitt
T : absolute Temperatur

7.4.1 Wärmestromdichte

$$\rho_Q \cdot v = -\lambda \frac{dT}{dx} \qquad J = -\lambda \frac{dT}{dx} = \rho_Q \cdot v \tag{7.44}$$

v : Propagation der Wärmedichte

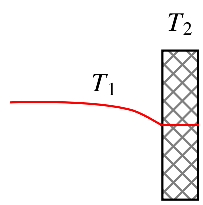
Verallgemeinerung

$$\overrightarrow{J} = -\lambda \cdot grad\left(T_{(x,y,z)}\right) \tag{7.45}$$

7.4.2 Wärmeübergang

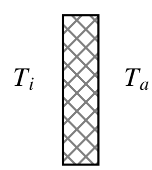
α : Wärmeübergangszahl

$$J = \frac{dQ}{dt \cdot A} = \alpha \cdot \Delta T \qquad \text{mit} \quad \Delta T = T_1 - T_2 \tag{7.46}$$



Material	λ
Diamant	600
Kupfer	384
Beton	1
Luft	0.026
Eisen	74

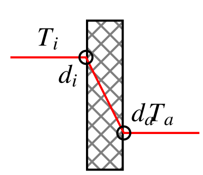
k : Wärmedurchgangszahl



$$T_i > T_a \qquad \Delta T = T_i - T_a$$

$$J = \frac{dQ}{dt \cdot A} = k \cdot \Delta T = k \cdot (T_i - T_a) \tag{7.47}$$

zweifaches Isolierglas: $k = 3.0$
Wärmedämmglas: $k = 1.3$



$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_i} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_a} \tag{7.48}$$

Kapitel 8

Wellenlehre

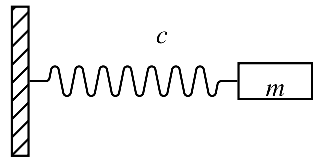
8.1 Schwingung

Endlich grosse Störung eines Systems aus der Ruhelage. Sie propagiert **nicht!**

Spezialfall: harmonische Schwingung

$$\begin{aligned} y(t) &= A \cdot \cos(\omega t + \delta) \\ \omega &= 2 \cdot \pi \cdot \nu \\ T_p &= \nu^{-1} \\ \delta &= \text{ Nullphasenwinkel, Anphasenwinkel} \\ A &= \text{ Amplitude} \end{aligned}$$

8.1.1 Erzwungene und gedämpfte Schwingung



$$m \cdot \ddot{y}_{(t)} = F_{Feder} + F_{Reib} + F_{Erzwingen} \tag{8.1}$$

$$\begin{aligned} F_{Feder} &= -c \cdot y_{(t)} \\ F_{Erzwingen} &= F_0 \cdot \cos(\omega_E \cdot t) \\ F_{Reib} &= -a \cdot \frac{\dot{y}}{|\dot{y}|} \qquad \text{Gleitreibung} \\ &= -b \cdot \dot{y} \qquad \text{Viskosereibung} \\ &= -\tilde{b} \cdot (\dot{y})^2 \cdot \frac{\dot{y}}{|\dot{y}|} \qquad \text{Druckwiderstand, z.B. Luft} \approx -v^2 \end{aligned}$$

bei $F_{Reib} = -b\dot{y}$:

$$m\ddot{y} = -cy - b\dot{y} + F_0 \cdot \cos(\omega_E \cdot t) \qquad \omega_0^2 = \frac{c}{m} \qquad D = \frac{b}{2 \cdot \omega_0 \cdot m} \tag{8.2}$$

$$\begin{aligned} \omega_0 &: \text{Schwingungsfrequenz des freien Oszillators} \\ D &: \text{Dämpfungsgrad} \end{aligned}$$

$$\ddot{y} = -\omega_0^2 \cdot y - w\omega_0 \cdot D \cdot \dot{y} + \frac{F_0}{m} \cos(\omega_E \cdot t)$$

freier Oszillator: $D = F_0 = 0$

$$\begin{aligned} \ddot{y} = -\omega_0^2 \cdot y \qquad &\text{(homogene Differentialgleichung)} \\ \implies \quad & y_{(t)} = C \cdot \cos(\omega t + \phi) \\ \implies \quad & y_{(t)} = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t) \end{aligned}$$

C,ϕ bzw. A, B sind Anfangsbedingungen.

Anfangsbedingung: $F_E \neq 0, D = 0$

$$y_{(t)} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega_E^2} \cos(\omega_E t) + C \cdot \cos(\omega_0 t + \delta) \tag{8.3}$$

Anfangsbedingung: $F_E \neq 0, D \neq 0$

$$y_{(t)} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2 \cdot D \cdot \omega_0 \cdot \omega_E)^2}} \cos(\omega_E t + \delta) \tag{8.4}$$

8.2 Wellen

Ausbreitung

$$x' = x - vt$$
$$x = x' + vt$$

$$\implies \quad y_{(x,t)} = y_0 \cdot (x - vt) \tag{8.5}$$

$\frac{dx}{dt} = v$: Propagationsgeschwindigkeit der Störung

$$y_{t(x)} = y_{(x,t)} = y_0 \cdot (x \mp vt)$$

In 2 und 3 Dimensionen gibt es eine Raumdämpfung:

$$\frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 y_{(x,t)}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y_{(x,t)}}{\partial x^2} \tag{8.6}$$

$$\frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 y_{(x_1,x_2,x_3,t)}}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2} \tag{8.7}$$

8.2.1 Harmonische Welle

$$y_{(x,t)} = A \cdot \cos\left(k \cdot (x - vt)\right) \tag{8.8}$$

In 3 Dimensionen werden x und k zu den Vektoren $\overrightarrow{x}$ und $\overrightarrow{k}$. $\overrightarrow{k}$ ist der Wellenvektor, zeigt in Richtung der Wellenausbreitung.

$$T = \frac{2\pi}{k \cdot v} \qquad \frac{1}{T} = \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{k \cdot v}{2\pi} \quad \implies \quad \omega = k \cdot v \tag{8.9}$$

$$\nu \cdot \lambda = v \tag{8.10}$$

8.2.2 Ausbreitungsgeschwindigkeit

Transversalwellen

Seilwelle

$$v = \sqrt{\frac{z}{\mu}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \tag{8.11}$$

$$\begin{aligned} z &: \text{Zugkraft} \\ \mu = \frac{m}{l} &: \text{“Längen-Massen-Dichte”} \\ \rho &: \text{Dichte} \\ \sigma = \frac{z}{A} &: \text{Zugspannung} \\ A &: \text{Querschnitt} \end{aligned}$$

Wasserwellen $h << \lambda$

$$v = \sqrt{g \cdot h} \qquad h : \text{Tiefe} \tag{8.12}$$

Elektromagnetische Wellen

$$\lambda \cdot \nu = c = 3 \cdot 10^8 \quad \left[\frac{m}{s}\right] \tag{8.13}$$

Sie ist immer Transversal falls keine Randbedingungen.

Longitudinalwellen

Schallwellen im Gas

$$v = \sqrt{\chi \cdot R \cdot T} \qquad R = \frac{R_M}{M} \qquad \chi = \frac{c_p}{c_V} \tag{8.14}$$

Schallwellen im Stab

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad E: \text{Elastizitätsmodul} \tag{8.15}$$

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \tag{8.16}$$

8.2.3 Dopplereffekt

Stehende Quelle, Bewegter Beobachter

$$\nu' = \nu\left(1 \mp \frac{u}{v}\right) \qquad \begin{cases} - \text{ weg von Quelle} \\ + \text{ zu Quelle} \end{cases} \tag{8.17}$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \mp\frac{u}{v} \tag{8.18}$$

u : Geschwindigkeit Beobachter

v : Wellenausbreitungsgeschwindigkeit

Bewegte Quelle, Stehender Beobachter

$$\nu' = \nu\frac{1}{1 \pm \frac{u}{v}} \qquad \begin{cases} - \text{ weg von Beobachter} \\ + \text{ zu Beobachter} \end{cases} \tag{8.19}$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\pm\frac{u}{v}}{1 \pm \frac{u}{v}} \tag{8.20}$$

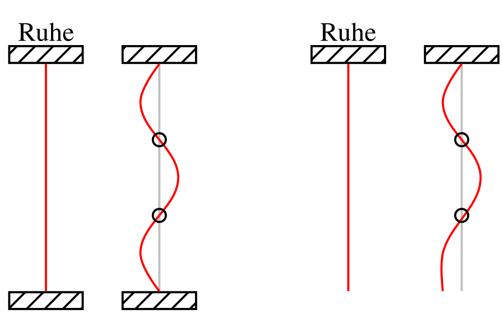
Dopplereffekt für el. magn. Wellen

$$\nu' = \nu\frac{\sqrt{1 \mp \frac{u}{v}}}{1 \pm \frac{u}{v}} \qquad \begin{cases} \text{weg: Zeichen oben} \\ \text{zu: Zeichen unten} \end{cases} \tag{8.21}$$

Für $u << c \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Delta\nu}{\nu} \approx \pm\frac{u}{v}$

8.2.4 Stehende Wellen

Verschiedene Randbedingungen können zu stehender Welle führen:

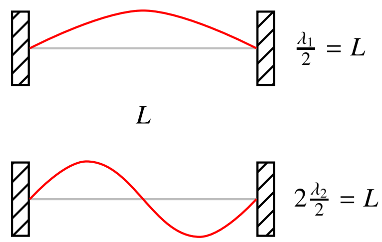


$$y_{(0,t)} = 0 \quad \forall t$$
$$y_{(l,t)} = 0 \quad \forall t$$

$$y_{(0,t)} = 0 \quad \forall t$$
$$\frac{dy_{(l,t)}}{dx} = 0 \quad \forall t$$

Stehende Welle = Schwingung

8.2.5 Stehende Welle auf Saite



$$n \cdot \frac{\lambda_n}{2} = L \tag{8.22}$$

$n = 1$: Grundschwingung, 1. Harmonische
$n = 2$: 1. Oberschwingung, 2. Harmonische
$n = 3$: 2. Oberschwingung, 3. Harmonische

Bedingung für $\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{n \cdot v}{2 \cdot L}$

8.2.6 Anregefrequenzen für Eigenschwingungen

$$\nu_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{z}{\mu}} \qquad \mu = \rho \cdot A \qquad z : \text{Zugkraft} \tag{8.23}$$

8.2.7 Stehende Welle in Luftsäule

Geschlossene Pfeife

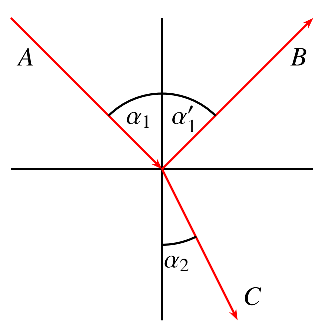
$$L = \frac{\lambda}{4} + n \cdot \frac{\lambda}{2} \qquad f_i \text{ mit } i = 1, 3, 5, 7, \ldots \tag{8.24}$$

Offene Pfeife

$$L = n \cdot \frac{\lambda}{2} \qquad f_i \text{ mit } i = 1, 2, 3, 4, \ldots \tag{8.25}$$

8.3 Reflexion und Brechungsgesetz

8.3.1 Allgemein



Medium 1: $c_1 = \frac{c}{n_1}$

Medium 2: $c_2 = \frac{c}{n_2}$

$n_1 < n_2$: Brechungsindices

A : einfallender Strahl
B : reflektierter Strahl
C : gebrochener Strahl

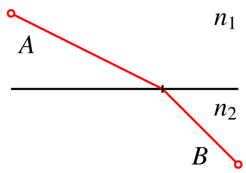
$$\alpha_1 = \alpha_1'$$

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \underbrace{\frac{n_2}{n_1}}_{\text{nur für Licht}} = \underbrace{\frac{c_1}{c_2}}_{\text{allgemein gültig}} \tag{8.26}$$

Totalreflexion wenn: $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$

$$\implies \quad \sin(\alpha_2) = \frac{n_1}{n_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

8.3.2 Prinzip von Fernat



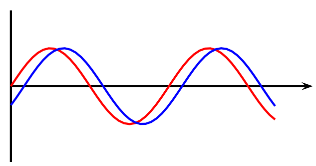
Der Strahl von A nach B wählt den schnellsten Weg.

8.4 Interferenz

8.4.1 Kohärenz

Kohärenz ist wenn zwei Bedingugnen gelten:

- gleiche Frequenz
- konstante Phasenverschiebung

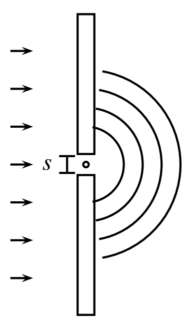


$$y = y_{1(x,t)} + y_{2(x,t)} \tag{8.27}$$

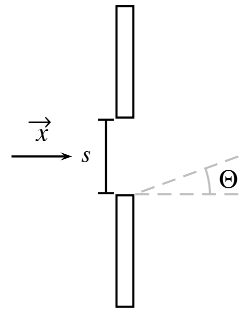
- Vollständige Verstärkung: $\Delta = n \cdot \lambda$
- Vollständige Auslöschung: $\Delta = \frac{\lambda}{2} + n \cdot \lambda$

Δ = Gangunterschied

8.4.2 Beugung am Spalt



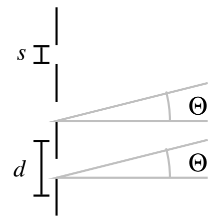
es gilt: $s << \lambda$
Jeder Punkt der virtuellen Grenzfläche dient als Ursprung einer sekundären Kugelwelle. Gesamterregung $\rightarrow$ Superposition.



es gilt: $\lambda < s$

$$\frac{A}{s} \cdot \frac{\lambda}{2\pi \sin(\Theta)} \cdot 2 \sin\left(\frac{\pi \cdot s \cdot \sin(\Theta)}{\lambda}\right) \cdot \cos\left(\phi_{(t)} + \frac{\pi \cdot s \cdot \sin(\Theta)}{\lambda}\right) \tag{8.28}$$

8.4.3 Beugung am Gitter



Richtung von max. Verstärkungen:

$$\sin(\Theta) = \frac{n \cdot \lambda}{d} \qquad \text{für } \pm n = 0, 1, 2, \ldots \tag{8.29}$$

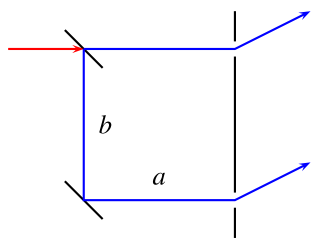
Richtung von Auslöschungen:

$$\sin(\Theta) = \frac{n \cdot \lambda}{d \cdot N} \qquad \text{für } n \neq iN \quad i = 0, 1, 2, \ldots \qquad (n \mod N \neq 0) \tag{8.30}$$

8.5 Ergänzungen

8.5.1 Koinzidenz

Koinzidenz wenn: Wellenzug>Gangdifferenz (Gangdifferenz $\Delta = b + c$)



8.5.2 Addition

Definition Intensität:

$$I_{(t)} = y^2 \qquad y_1 = A_1 \cdot \sin(\omega t) \tag{8.31}$$

$$\overline{I} = \frac{1}{T} \int_0^T I_{(t)}\, dt \qquad y_2 = A_2 \cdot \sin(\omega t) \tag{8.32}$$

Koharente Addition

$$\overline{I}_{koh.} = \frac{1}{2} (A_1 + A_2)^2 \tag{8.33}$$

Inkohärente Addition

$$\overline{I}_{inkoh.} = \frac{1}{2} A_1^2 + \frac{1}{2} A_2^2 \tag{8.34}$$

Kapitel 9

Elektro

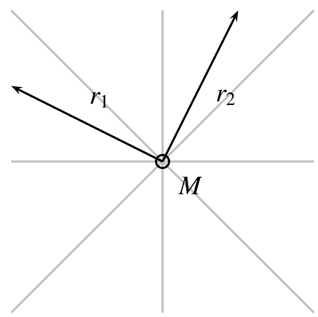
9.1 Felder

9.1.1 Gravitationsfeld

$$\vec{g}_{(\vec{r})} = -\frac{G \cdot M \cdot \vec{r}}{r^3} \qquad \text{Zentralsymmetrischer Fall} \tag{9.1}$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \quad \left[\frac{N \cdot m}{kg^2}\right]$$

$$\vec{F} = \frac{G \cdot M \cdot m \cdot \left(\vec{r}_M - \vec{r}\right)}{\left\|\vec{r}_M - \vec{r}\right\|^2} \qquad \text{Allgemeiner Fall} \tag{9.2}$$



$$\|\vec{g}_{(\vec{r}_2)}\| = \|\vec{g}_{(\vec{r}_1)}\| \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2} \tag{9.3}$$

Verallgemeinerung

$$\vec{g}_{(\vec{r})} = G \cdot \sum_{i=1}^{N} M_i \cdot \frac{\vec{r}_i - \vec{r}}{\left\|\vec{r}_i - \vec{r}\right\|^3} \qquad \text{Zentralproblem} \tag{9.4}$$

$$\vec{g}_{(\vec{r})} = G \cdot \int \frac{\rho_{(\vec{x})} \cdot \left(\vec{x} - \vec{r}\right)}{\left\|\vec{x} - \vec{r}\right\|^3} \, dV \tag{9.5}$$

9.1.2 Feldfluss

$$\text{Feldfluss} \quad \vec{F}_{(\vec{r})} = \rho_{(\vec{r})} \cdot \vec{v}_{(\vec{r})} \tag{9.6}$$

Definition durch orientierte Fläche

$$\partial\phi_{d\vec{a}} = \vec{F}_{(\vec{r})} \cdot d\vec{a} \tag{9.7}$$

$$\partial\phi_{d\vec{a}} = \vec{F}_{(\vec{r})} \cdot \underbrace{\hat{n}}_{\text{normierter Normalenvektor}} \cdot da \tag{9.8}$$

$$\phi = \hat{n} \cdot \vec{v} \cdot A \tag{9.9}$$

Verallgemeinerung

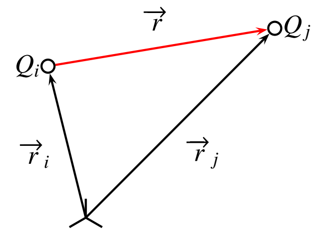
$$\phi_A = \underbrace{\int_{\partial A}}_{\text{Rand der Fläche}} \vec{F}_{(\vec{r})} \, d\vec{a} \tag{9.10}$$

9.1.3 Definitionen

Elektrische Ladung

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \quad \left[\frac{C^2}{N \cdot m^2}\right] \tag{9.11}$$

Ladung eines Elektrons: $1.6 \cdot 10^{-19} \quad [C]$



$$\vec{F}_{ij} = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q_i \cdot Q_j \cdot \left(\vec{r}_j - \vec{r}_i\right)}{\left\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\right\|^3} \tag{9.12}$$

Elektrisches Feld

$$\vec{F}_{ij} = Q_j \cdot \vec{E}_i \tag{9.13}$$

$$\vec{E}_{i(\vec{r})} = \frac{Q_i \cdot \vec{r}}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^3} \tag{9.14}$$

Feldrichtung : Richtung von $\vec{E}$ ist die Richtung der Kraft die eine positive Probeladung erfährt.

9.1.4 Satz von Gauss

$$\phi_{Kugel} = \int_{\partial Kugel} \vec{E}\, d\vec{a} = \frac{Q}{\epsilon_0} \qquad \text{(Radiusunabhängig!)} \tag{9.15}$$

$$\vec{E}_{(\vec{r})} = \int_V \frac{\rho_{e(\vec{x})} \cdot (\vec{r} - \vec{x})}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \left\|\vec{r} - \vec{x}\right\|^3}\, dV \tag{9.16}$$

Gauss in Integralform

$$\phi_{\partial V} = \int_{\partial V} \vec{E}\, d\vec{a} = \frac{Q_{innen}}{\epsilon_0} \tag{9.17}$$

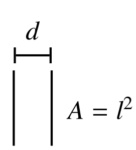
$$Q_{innen} = \int_{\mathbb{V}} \rho_{e(\vec{x})}\, dV \tag{9.18}$$

Gauss in Differentialform

$$\left(\vec{E}\right)' = \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial z} \qquad \epsilon_0 \cdot \left(\vec{E}\right)' = \rho_e \tag{9.19}$$

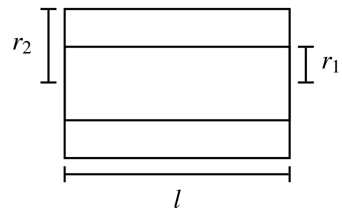
9.1.5 Elektrische Ladung: Beispiele

Plattenkondensator



$$E = \frac{Q}{A \cdot \epsilon_0} \tag{9.20}$$

Zylinderkondensator



$$\overrightarrow{E} = \frac{-\lambda_e \cdot \hat{r}}{2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} \qquad \text{mit} \quad \lambda_e = \frac{|Q|}{l} \qquad E \sim \frac{1}{r^{n-1}} \tag{9.21}$$

9.2 Elektrische Spannung

$$U_{AB} = \frac{W_{AB}}{Q^+_{Proto}} = \int_A^B \overrightarrow{E}\, d\overrightarrow{s} \tag{9.22}$$

$$U_{(r)} = \underbrace{\int_r^\infty \overrightarrow{E}\, d\overrightarrow{s}}_{\text{Allgemein}} = \underbrace{\frac{Q^+_{erz}}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}}_{\text{Kugelsymmetrie}} \tag{9.23}$$

$$\operatorname{grad}\left(U_{(r)}\right) = -\overrightarrow{E} \tag{9.24}$$

Bemerkungen

- $\int \overrightarrow{E}\, d\overrightarrow{s}$ ist Wegunabhängig
- $U_{AB} = -U_{BA}$
- $U_{AC} = U_{AB} + U_{BC}$

9.3 Elektrostatik

9.3.1 Berechung E aus U

Zentralsymmetrisches Feld

$$\overrightarrow{E} = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\overrightarrow{r}}{r^3} \tag{9.25}$$

Dipolfeld

$$\overrightarrow{p}_d = Q^+ \cdot \overrightarrow{d} \qquad \left(\overrightarrow{d} \text{ zeigt von } Q^- \text{ nach } Q^+\right) \tag{9.26}$$

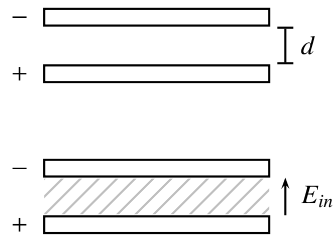
9.3.2 Dielektrika

Der Abstand zwischen dem Atomkern und dem Elektron ist die *Separationsdistanz* $\delta < \infty$

$$N \cdot Q \cdot \overrightarrow{\delta} = \overrightarrow{P} \tag{9.27}$$

N : Anzahl Atome pro Volumen
Q : Ladung
δ : Separationsdistanz
P : Polarisationsdichte (-vektor)

Plattenkondensator



$$C = \frac{\epsilon_0 \cdot A}{d} \tag{9.28}$$

$$N \cdot Q \cdot \delta = \frac{Q_{oberfl.}}{A} = P = \sigma_{pol.} \tag{9.29}$$

$$P = \chi \cdot \epsilon_0 \cdot E_{in} \qquad E : \text{elektrsiche Suszeptibilität} \tag{9.30}$$

$$E_{in} = \frac{\sigma_{free}}{\epsilon_0 \cdot (1 + \chi)} \tag{9.31}$$

$$\implies \qquad c = \frac{A \cdot \epsilon_0}{d}(1 + \chi) \tag{9.32}$$

$$\epsilon_r = 1 + \chi = \epsilon \qquad E_{in} = \frac{E_v ac.}{\epsilon} \tag{9.33}$$

9.3.3 Bewegung von Ladung im E-Feld

$$1eV = 1.6 \cdot 10^{-19} \quad [J] \tag{9.34}$$

$$\Delta E_{kin} = Q^+ \cdot \Delta U = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \tag{9.35}$$

$$\text{Masse Elektron: } 9.1 \cdot 10^{-31} \quad [kg] \tag{9.36}$$

9.3.4 Mobilität

$$\overrightarrow{v}_{end} = \mu \cdot \overrightarrow{E} \quad \left[\frac{m^2}{s \cdot V}\right] \tag{9.37}$$

$$\mu_{O_2^+} \approx 1 \quad \left[\frac{cm^2}{s \cdot V}\right] \tag{9.38}$$

9.3.5 Energieim Kondensator

$$W = \frac{Q^2}{2 \cdot C} = \frac{C}{2} \cdot U^2 \tag{9.39}$$

9.3.6 Energiedichte ν

$$\nu = \frac{\epsilon_0}{2} \cdot E_v^2 \qquad : \text{Energiedichte im Vakuum} \tag{9.40}$$

$$\nu = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r}{2} \cdot E_{diel}^2 \qquad : \text{Energiedichte im Dielektrikum} \tag{9.41}$$

$$\nu = \frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon_0}{\epsilon_r} \cdot E_v^2 \tag{9.42}$$

9.3.7 Anziehung zweier Platten

$$F = \nu \cdot A \qquad A : \text{Fläche der Platten} \tag{9.43}$$

9.4 Stromstärke

$$I = \frac{\partial Q}{\partial t} = \dot{Q} \quad \left[A = \frac{C}{s}\right] \tag{9.44}$$

$$\overrightarrow{j} = \rho \cdot \overrightarrow{v} \qquad \text{: Landugnsfluss, Stromdichte} \tag{9.45}$$

9.5 Ohm'sches Gesetz

$$U = R \cdot I \quad [V = \Omega \cdot A] \tag{9.46}$$

$$\overrightarrow{j} = \sigma \cdot \overrightarrow{E} \tag{9.47}$$

$$U = i \cdot \frac{l}{A \cdot \sigma} \qquad R = \frac{l}{A \cdot \sigma} = \frac{\rho \cdot l}{A} \tag{9.48}$$

$$\sigma^{-1} = \rho \tag{9.49}$$

$$\rho = \frac{A \cdot R}{l} \tag{9.50}$$

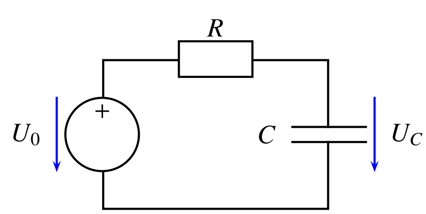
$$\sigma = \mu \cdot \rho_e \tag{9.51}$$

l : Leiterlänge
A : Leiterquerschnitt
σ : spezifische Leitfähigkeit
ρ : spezifischer Widerstand

9.6 Zeitkonstante τ

$$\tau = R \cdot C \quad [s] \tag{9.52}$$

9.6.1 Laden und Entladen eines Kondensators



$$U_C = U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \tag{9.53}$$

$$Q_{(t)} = Q_{max} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \tag{9.54}$$

9.7 Kirchhoff

9.7.1 Knotenpunktsatz

$$\sum i = 0 \tag{9.55}$$

9.7.2 Maschenpotentialsatz

$$\sum u = 0 \tag{9.56}$$

Kapitel 10

Magnetismus

10.1 Ausdrücke

$\vec{B}$-Feld Magnetisches Induktionsfeld, verursacht durch Ströme (Gleichförmig bewegte Ladung)

Lorentzkraft Kraft auf bewegte Ladung, bewirkt durch das $\vec{B}$-Feld.

Induktion Erzeugung einer elektrischen Spannung durch zeitlich veränderliches $\vec{B}$-Feld.

10.2 Lorzentzkraft

Bewegte ladung erfährt eine Kraft, die *Lorentzkraft*:

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \tag{10.1}$$

mit

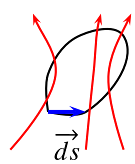
$$B \quad \left[\frac{Ns}{Cm} = \frac{N}{Am} = \frac{Vs}{m^2} = Tesla\right] \qquad \text{und} \qquad 1Gauss = 10^{-4} \quad [T]$$

10.3 Gesetz von Biot-Savart

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{\vec{ds} \times \vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} \tag{10.2}$$

Induktionstante: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1.256 \cdot 10^{-6} \quad \left[\frac{Tm}{A}\right]$
$dB \sim I \qquad dB \sim \frac{1}{r^2}$

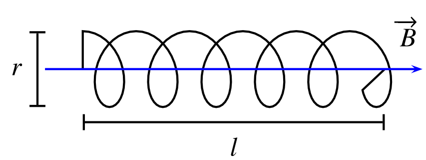
10.4 Gesetz von Ampère



$$\int\limits_C \vec{B}\vec{ds} = \mu_0 \cdot I_{total} \qquad \text{mit} \qquad I_{total} = \sum_i I_i \tag{10.3}$$

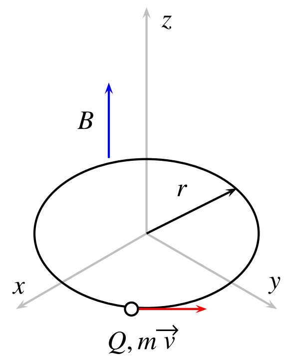
$B_{Erde} = 0.2Gauss$

10.4.1 Beispiel: Spule



$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi r} \qquad B_{innen} = \mu_0 \cdot n \cdot T \qquad \text{mit} \quad n = \frac{N}{l} \text{ Windungen} \tag{10.4}$$

10.5 Bahnkurve eines geladenen Teilchens

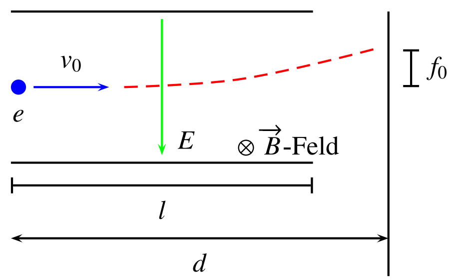


$$m \cdot \omega = Q \cdot B \qquad \text{mit} \quad v_{0z} = 0 \qquad \omega \neq f(r) \qquad r \sim v_0 \tag{10.5}$$

Zyklotron:

$$\omega = \frac{Q \cdot B}{m} = 2\pi \cdot \gamma = \frac{2\pi}{T} \tag{10.6}$$

10.6 Spezifische Ladung $\frac{e}{m}$ des Elektrons



für $B = 0$:

$$f_0 = \frac{E \cdot e \cdot l}{2 \cdot m \cdot v_0^2}(2d - l) \tag{10.7}$$

$$v_0^2 = \frac{E \cdot e \cdot l}{2 \cdot m \cdot f_0}(2d - l) \tag{10.8}$$

für $B \neq 0 \qquad f = 0$:

$$\frac{e}{m} = \frac{2 \cdot E \cdot f_0}{B^2 \cdot l \cdot (2d - l)} \tag{10.9}$$

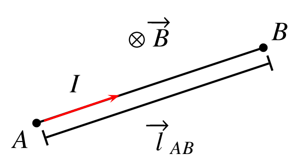
10.7 Kraft im hom. Magnetfeld

10.7.1 Auf Leiter

$$\overrightarrow{dF} = dq \cdot \vec{v} \times \vec{B} \tag{10.10}$$

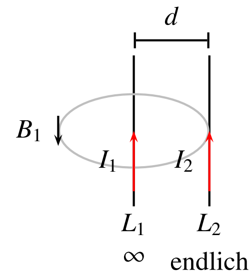
$$\overrightarrow{dF} = I \cdot \overrightarrow{ds} \times \vec{B} \tag{10.11}$$

Spezialfall: Leiter Geradlinig:



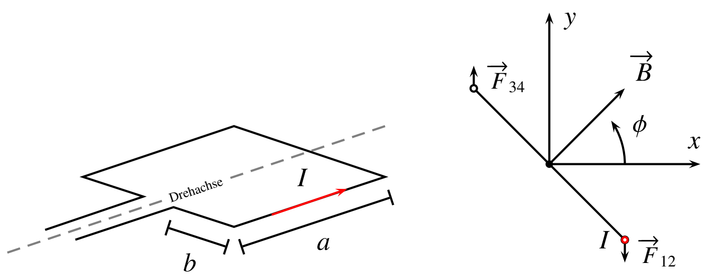
$$F = I \cdot \vec{l}_{AB} \times \vec{B} \tag{10.12}$$

10.7.2 Zwischen zwei geraden, parallelen Strömen



$$B_1 = B_{ind} = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot d}$$
$$\frac{F_{12}}{l_2} = \frac{I_1 \cdot I_2 \cdot \mu_0}{2\pi \cdot d}$$

10.7.3 Gleichstrommotor



$$T_z = -a \cdot b \cdot I \cdot B \cdot \sin(\phi) \tag{10.13}$$

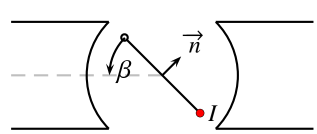
Für N Windungen:

$$T_z = -A \cdot N \cdot I \cdot B \cdot \sin(\phi) \qquad \text{mit} \quad A = a \cdot b$$
$$\Theta \cdot \ddot{\phi} = T_z = -A \cdot N \cdot I \cdot B \cdot \phi$$

Harmonischer Oszillator

$$T = I_{(t)} \cdot N \cdot A \cdot B \cdot \sin(\phi_{(t)})$$
$$U_{ind} = -\omega \cdot N \cdot A \cdot B \cdot \sin(\phi)$$

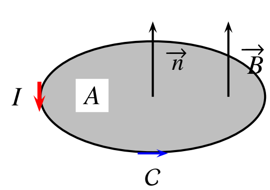
10.7.4 Galvanometer



$$\beta = \frac{A \cdot N \cdot I \cdot B}{D} \qquad D: \text{Spiralfederkonstante} \tag{10.14}$$

Ausschlag proportional zu I

10.7.5 Drehmoment auf ebene Leiterschleife



$\vec{B}$	homogenes Feld
C	ebene, geschlossene Kurve
A	Fläche von C umschlossen
I	Strom durch C
$\vec{n}$	rechtwinklig auf A

Definition: Magnetisches Moment

$$\vec{m} = I \cdot A \cdot \vec{n} \tag{10.15}$$

Drehmoment um beliebigen Punkt P

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B} \tag{10.16}$$

Für N Windungen:

$$\|\vec{T}\| = I \cdot A \cdot N \cdot B \cdot \sin(\phi) \tag{10.17}$$

10.8 Induktivität

10.8.1 Induktionsgesetz von Faraday

Magnetischer Fluss ϕ des $\vec{B}$-Feldes:

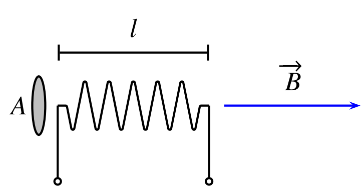
$$\phi_A = \int_A \vec{B}\,\vec{da} = \int_A \vec{B}\,\vec{n}\,da \quad \left[\text{Weber } = Tm^3 = Vs\right] \tag{10.18}$$

$$U_{ind} = -\dot{\phi} \tag{10.19}$$

Lenz'sche Regel Die induzierte Spannung erzeugt ein Induktionsstrom, der so gerichtet ist, dass er dem ihn erzeugenden Vorgang zu hemmen versucht.

10.8.2 Selbstinduktion

Spule im äusseren Feld:



$$U_{ind} = -N \cdot A \cdot \dot{B}_{(t)} \tag{10.20}$$

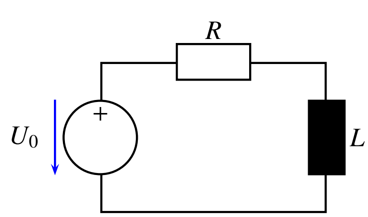
Spule im eigenen Feld, bewirkt durch I

$$U_{ind} = -\mu_0 \cdot \frac{N^2 \cdot A}{l} \cdot I_{(t)} \tag{10.21}$$

Allgemein: $U_{ind} = -L \cdot \dot{I}_{(t)}$

$$L = \frac{N^2 \cdot A \cdot \mu_0}{l} \quad [\text{Henry } = H] \tag{10.22}$$

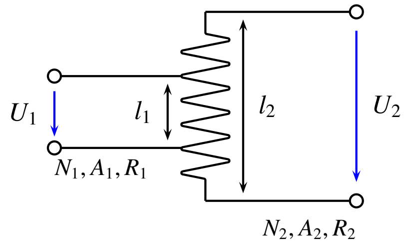
10.8.3 Schalten eines Stromes in einer Spule



$$I_{(t)} = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right) \tag{10.23}$$

$$I_{max} = \frac{U_0}{R} \tag{10.24}$$

10.8.4 Transformator



$$L_{11} = \frac{\mu_0 \cdot A_1 \cdot N_1^2}{l_1}$$
$$L_{22} = \frac{\mu_0 \cdot A_2 \cdot N_2^2}{l_2}$$

Induktion $U_{11} = -L_{11} \cdot \hat{I}_1$ und $U_{12} = -L_{12} \cdot \hat{I}_1$ mit

$$L_{12} = \frac{\mu_0 \cdot A_2 \cdot N_1 \cdot N_2}{l_1}$$
$$L_{21} = \frac{\mu_0 \cdot A_1 \cdot N_1 \cdot N_2}{l_2}$$

$$L_{12}^2 = L_{21}^2 = L_{11} \cdot L_{22}$$
$$\frac{U_1}{U_2} = -\frac{N_2}{N_1}$$

10.8.5 Energie des magnetischen Feldes

Aus der induzierten Spannung einer Spule

$$W_{magn} = -\int_0^T u_{ind} \cdot I\, dt$$
$$W_{magn} = \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2}{\mu_0} \cdot l \cdot A$$
$$W_{magn} = \frac{1}{2} \cdot \frac{B_{mat}^2}{\mu_o \cdot \mu_r} \cdot l \cdot A$$

mit

μ_r: Permabilität
μ_0: Induktionskoeffizient

Energiedichte:

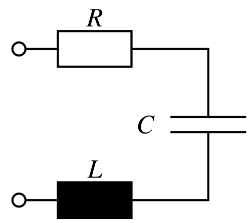
$$v_{magn} = \frac{1}{2}\frac{B_{vac}^2}{\mu_0} \cdot \mu_r$$

oder

$$v_{magn} = \frac{1}{2} \cdot \frac{B_{mat}^2}{\mu_0 \cdot \mu_r}$$

10.9 RCL-Kreis

$$\dot{U}(t) = L \cdot \ddot{I} + R \cdot \dot{I} + I \cdot \frac{1}{C} \tag{10.25}$$



allgemeine Lösung: $I = I_h + I_{ih}$

homogene Lösung:

$$\ddot{I} + \frac{1}{LC} I = 0 \qquad \text{mit} \quad R = 0 \tag{10.26}$$

$$L \cdot \ddot{I} + R \cdot \dot{I} + \frac{1}{C} \cdot I = 0 \qquad \text{mit} \quad R \neq 0 \tag{10.27}$$

$$\begin{array}{lcl}
R^2 > \frac{4L}{C} & \Longrightarrow & \text{grosse Dämpfung:} \quad \lambda_{12} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}} \\
R^2 = \frac{4L}{C} & \Longrightarrow & \text{kritisch:} \quad \lambda_{12} = -\frac{R}{2L} \\
R^2 < \frac{4L}{C} & \Longrightarrow & \text{kleine Dämpfung:} \quad \lambda_{12} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{j}{2}\sqrt{-\frac{R^2}{L^2} + \frac{4}{LC}}
\end{array}$$

partikuläre Lösung:

$$\underline{I} = I_0 \cdot e^{j(\omega t - \phi)} \tag{10.28}$$

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 - \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \tag{10.29}$$

Achtung: der Lösungstrick mit dem Rechnen mit komplexen Zahlen funktioniert *nur* im linearen Fall, d.h.:

$$I(\omega, t) = \underline{z}^{-1}(\omega) \cdot \underline{u}(\omega, t) \qquad \text{mit} \quad \underline{z} \text{ nicht Abhängig von } u$$

sonst werden sich andere Frequenzen zeigen:

$$\underline{I} = a_0 + a_1 \cdot I_1 + a_2 \cdot I_2^2$$
$$I_i = u_1 \cdot e^{j(\omega_1 \cdot t - \phi_1} + u_2 \cdot e^{j(\omega_2 \cdot t - \phi_2)}$$

Kapitel 11

Relativität

11.1 Lichtgeschwindigkeit c

Die absolute Lichtgeschwindigkeit $c \approx 3 \cdot 10^8 \quad \left[\frac{m}{s}\right]$

11.2 Galilei-Transformation (GT)

$$\begin{aligned} x' &= x - vt & y' &= y & z' &= z & t' &= t \\ x &= x' + vt & y &= y' & z &= z' & t &= t' \end{aligned}$$

11.3 Lorentz-Transformation

Einstein's (1905) spezielle Relativitätstheorie basiert auf drei Postulaten:

1. Konstanz und Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit c
2. Der Raum ist homogen und isotrop.
3. Alle Inertialsysteme sind Gleichwertig.

11.3.1 Hintransformation

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{11.1}$$

11.3.2 Rücktransformation

$$x' \leftrightarrow x \qquad y' \leftrightarrow y \qquad z' \leftrightarrow z \qquad t' \leftrightarrow t$$

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{11.2}$$

11.3.3 Notation

$$\beta \equiv \frac{v}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \beta = \frac{\partial x^1}{\partial x^0} \quad \text{für } \beta \to 1 \tag{11.3}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} c \cdot t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{11.4}$$

11.3.4 Transformationen, die 2.

Hintransformation:

$$\begin{aligned} x^{0\prime} &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x^{1\prime} &= \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x^{2\prime} &= x^2 \\ x^{3\prime} &= x^3 \end{aligned}$$

Rücktransformation:

$$\begin{aligned} x^0 &= \gamma(x^{0\prime} - \beta x^{1\prime}) \\ x^1 &= \gamma(x^{1\prime} + \beta x^{0\prime}) \\ x^2 &= x^{2\prime} \\ x^3 &= x^{3\prime} \end{aligned}$$

mit

$$\underline{x} \quad : \text{Ereignis, Ereignispunkt}$$

11.4 Geschwindigkeitsaddition

11.4.1 Longitudinal

$$v_1' = \frac{v_1 - v}{1 - \frac{v_1' \cdot v}{c^2}} \qquad v_1 = \frac{v_1' + v}{1 + \frac{v_1' \cdot v}{c^2}} \tag{11.5}$$

11.4.2 Allgemein

(auch traversal)

$$v_1 = \frac{v_1' + v}{1 + \frac{v \cdot v_1'}{c^2}} \qquad v_2 = v_2' \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v \cdot v_1'}{c^2}} \tag{11.6}$$

Transversalfal: $v_1' = 0$

$$\Longrightarrow \quad v_1 = v \qquad v_2 = v_2' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

11.5 Dopplereffekt

11.5.1 Longitudinal

Sich nährend:

$$\nu = \nu' \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \qquad \Delta t = \Delta t' \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \tag{11.7}$$

Sich entfernend:

$$\nu = \nu' \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \qquad \Delta t = \Delta t' \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \tag{11.8}$$

11.5.2 Transversal

$$\nu = \nu' \sqrt{1 - \beta^2} \qquad \text{(für hin } \textit{und} \text{ zurück)} \qquad \Delta t = \gamma \cdot \Delta t' \tag{11.9}$$

11.6 Längenkontraktion

$$l = l' \sqrt{1 - \beta^2} \tag{11.10}$$

Die vorbeifliegende Rakete scheint verkürtzt: $l < l' = l_{Ruhe} =$ Eigenlänge

11.7 Zeitdilatation

$$T = t_2 - t_1 = \delta_t \cdot t = \gamma(t_2' - t_1') = \gamma \cdot T' \qquad \text{mit } T > T' = \text{ Eigenzeit} \tag{11.11}$$

11.8 μ-Meson

Kosmische Strahlung in der Höhe 10..20km generieren μ-Mesonen, welche auf der Oberfläche beobachtet wurden.
Eigenlebensdauer: $2.2 \cdot 10^{-6} \quad [s]$

Teil III

Elektrotechnik

11.9 Konstanten

11.9.1 Elemtarladung

$$e_0 = 1.6 \cdot 10^{-19} \quad [As] \tag{11.12}$$

11.9.2 Dielektrizitätskonstante

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \quad \left[\frac{As}{Vm}\right] \tag{11.13}$$

ϵ_r	umgebendes Material
≈ 1	Luft
$= 1$	Vakuum
81	Wasser

11.9.3 Spezifischer Widerstand

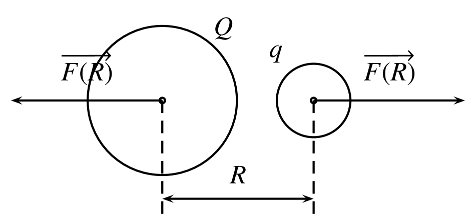
Material	ρ $\left[\Omega \frac{mm^2}{m}\right]$	ρ $[\Omega m]$
Kupfer	$\approx 1.8 \cdot 10^{-2}$	$1.8 \cdot 10^{-8}$
Eisen	≈ 0.2	
Chromnickel	≈ 1.15	$1.15 \cdot 10^{-6}$
Widerstandsdraht	≈ 0.4	
Glas	$\approx 5 \cdot 10^{13}$	$5 \cdot 10^{7}$
Porzellan	$\approx 10^{16}$	

11.9.4 Temperatur-Koeffizient

Material	α $\left[\frac{1}{C}\right]$	β $\left[\frac{1}{C^2}\right]$
Kupfer	$0.393 \cdot 10^{-2}$	$0.6 \cdot 10^{-6}$
Konstantan	$2 \cdot 10^{-6}$	0
Mangemin	$6 \cdot 10^{-6}$	0
Kohlenstoff	$-5 \cdot 10^{-4}$	

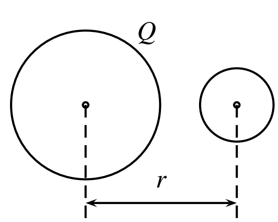
11.10 Grundlagen

11.10.1 Coulombsche Kraft



$$F(R) = \frac{Q \cdot q}{4\pi \cdot \epsilon_r \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2} \quad [N] \tag{11.14}$$

11.10.2 Elektrische Feldstärke



$$E(r) = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \cdot \frac{1}{r^2} \tag{11.15}$$

$$E(\vec{r}) = E(r) \cdot \frac{\vec{r}}{||\vec{r}||} \tag{11.16}$$

$$Q = n \cdot e \tag{11.17}$$

11.10.3 Kraftwirkung im elektrischen Feld

$$\vec{F} = \vec{E} \cdot q \quad [N] \tag{11.18}$$

11.10.4 Strom I, i

$$i = \frac{\partial q}{\partial t} \quad [A] \tag{11.19}$$

$$i = \frac{n \cdot e^- \cdot v \cdot A \cdot \partial t}{\partial t} = n \cdot e^- \cdot v \cdot A \tag{11.20}$$

mit

$$\begin{aligned} A &: \text{Leiterquerschnitt} \\ v &: \text{Geschwindigkeit} \\ n &: \text{Dichte der Elektronen} \quad \left[m^{-3}\right] \\ b &: \text{Beweglichkeit} \quad \left[\frac{m^2}{v \cdot s}\right] \end{aligned}$$

$$I = q \cdot n \cdot A \cdot b \cdot E \tag{11.21}$$

11.10.5 Stromdichte J, j

$$j = \frac{i}{A} \qquad J = \frac{I}{A} \quad \left[\frac{A}{m^2}\right] \tag{11.22}$$

11.10.6 Spannung U, u

$$U = \underbrace{\frac{W}{q}}_{\text{Arbeitsvermögen pro Ladung}} = \underbrace{E \cdot l}_{\text{Feldstärke mal Länge}} \quad [V] \tag{11.23}$$

11.10.7 Ohmsches Gesetz

$$U = R \cdot I = \rho \frac{l}{A} \quad [V] \tag{11.24}$$

$$I = \delta \frac{A}{l} \cdot U \quad [I] \tag{11.25}$$

$$R = \frac{U}{I} \quad [\Omega] \tag{11.26}$$

$$\begin{aligned} R &: \text{Widerstand} \quad [\Omega] \\ G &: \text{Gleitwert} \quad [S] \\ \delta &: \text{spez. Leitfähigkeit} \ = n \cdot \epsilon_0 \cdot b \\ \rho &: \text{spez. Widerstand} \ = \frac{1}{\delta} \\ l &: \text{Länge des Drahtes} \\ A &: \text{Querschnitt} \end{aligned}$$

11.10.8 Leistung P

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) \quad [W] \tag{11.27}$$

mit

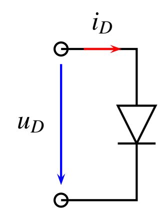
$$u(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t) \quad \text{und} \quad i(t) = \hat{i} \cdot \cos(\omega t) \tag{11.28}$$
$$P = U \cdot I \quad [W] \tag{11.29}$$

11.10.9 Widerstand R

$$R = \frac{U}{I} \quad [\Omega] \tag{11.30}$$
$$R_{(20C+\Delta\theta)} = R_{20}\left(1 + \alpha \cdot \Delta\theta + \beta \cdot (\Delta\theta)^2 + \cdots\right) \quad [\Omega] \tag{11.31}$$

11.11 Halbleiter

11.11.1 Diode



$$i_D = I_s\left(e^{\frac{|e_0| \cdot u_D}{k \cdot T}} - 1\right) = I_s\left(e^{\frac{u_D}{u_S}} - 1\right) \tag{11.32}$$

I_s : Sperrstromkonstante $[A]$

ϵ_0 $1.6 \cdot 10^{-19}$ $[As]$

k : Bolzman-Konstante $= 1.38 \cdot 10^{-23}$ $\left[\frac{J}{K}\right]$

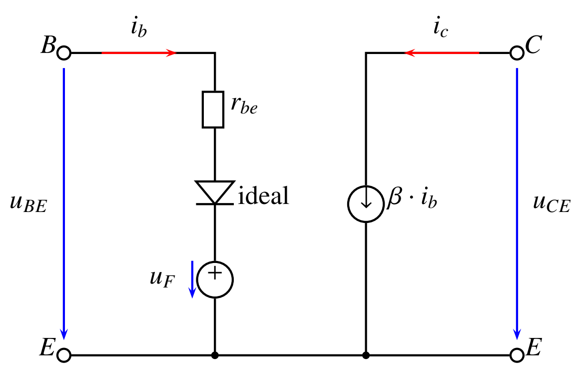
T : absolute Temperatur $[K]$

Flussspannung-Übersicht

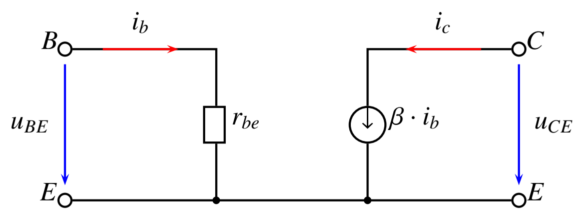
Silizium	$\approx 0.7 \ldots 0.8$ $[V]$
Germanium	≈ 0.3 $[V]$
Schottky	≈ 0.4 $[V]$

11.11.2 Transistor

Grosses Ersatzschaltbild (NPN)



Kleines Ersatzschaltbild (NPN)



Hybridparameter

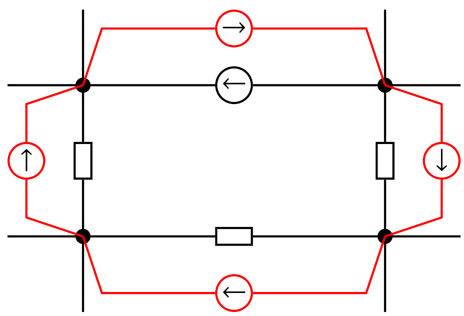
$$\underbrace{\begin{bmatrix} h_{ie} & h_{re} \\ h_{fe} & h_{oe} \end{bmatrix}}_{e\text{ : Emitterschaltung}} \cdot \begin{bmatrix} i_b \\ u_{ce} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{be} \\ i_c \end{bmatrix} \tag{11.33}$$

siehe Datenblatt:

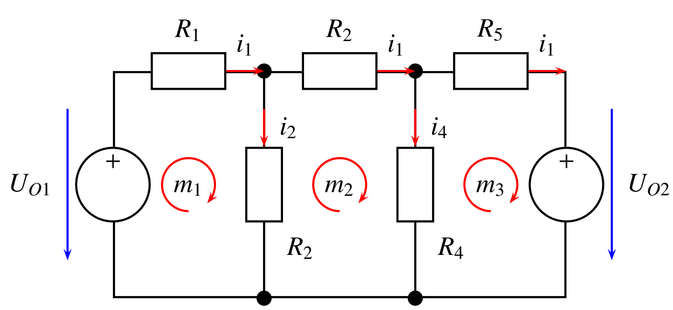
$$\begin{aligned} h_{ie} &= r_{be} \\ h_{re} &= \alpha \\ h_{fe} &= \beta \\ h_{oe} &= G_{oe} = \frac{1}{r_{oe}} \end{aligned}$$

11.12 Netzwerke

11.12.1 Manipulation mit idealen Quellen



11.12.2 Maschenstromverfahren



1. Vorbereitung des Netzwerkes: Stromquellen wegschaffen

2. Wahl der geeigneten Maschen

Widerstandsmatrix

$$W = \begin{pmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 \\ R_2 & R_2 + R_3 + R_4 & -R_4 \\ 0 & -R_4 & R_4 + R_5 \end{pmatrix} \tag{11.34}$$

Direktes Aufstellen von W:

1. Diagonalelemente ($i = k$): Summe der Widerstände, durch die der betreffende Maschenstrom fliesst.
2. Übrige Elemente ($i \neq k$): Summe der Widerstände, durch die der Maschenstrom i und k fliesst. Das Vorzeichen ist negativ falls die Maschenströme unterschiedliche Richtungen haben.

Quellvektor

$$\underline{u_0} = \begin{pmatrix} +U_{01} \\ 0 \\ -U_{02} \end{pmatrix} \tag{11.35}$$

Direktes Aufstellen von u_0: Summe der einzelnen Quellspannungen in jeder Masche. Das Vorzeichen ist positiv wenn sich ein positiver Maschenstrom ergeben würde.

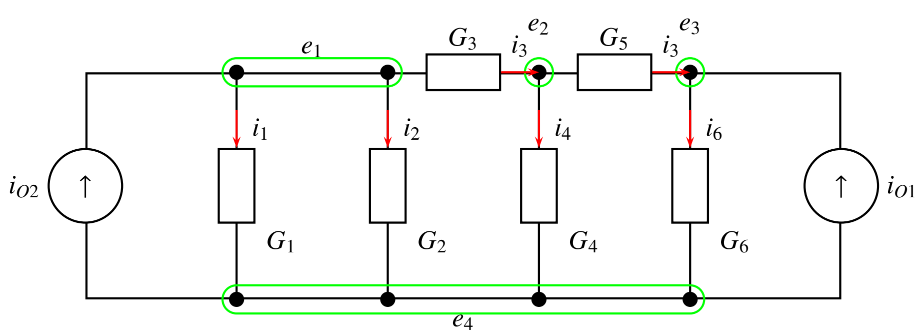
Maschenstromvektor

$$\underline{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} \tag{11.36}$$

Lösung

$$W \cdot \underline{m} = \underline{u_0} \tag{11.37}$$

11.12.3 Knotenspannungsverfahren



1. Vorbereitung des Netzwerkes:
   - Alles in Leitwert umrechnen
   - Spannungsquellen beseitigen
2. Einführung der Knotenspannungen:
   - Wahl eines geeigneten Bezugsknotens

Leitwertmatrix

$$L = \begin{pmatrix} G_1 + G_2 + G_3 & -G_3 & 0 \\ -G_3 & G_3 + G_4 + G_5 & -G_5 \\ 0 & -G_5 & G_5 + G_6 \end{pmatrix} \tag{11.38}$$

Direktes Aufstellen von Li:

1. Diagonalelemente ($i = k$): Summe aller Leitwerte des betreffenden Knotens
2. Übrige Elemente ($i \neq k$): Summe der Leitwerte, die die betroffenen Knoten miteinander verbindet. Das Vorzeichen ist immer negativ.

Quellvektor

$$\underline{i_0} = \begin{pmatrix} i_{02} \\ 0 \\ i_{01} \end{pmatrix} \tag{11.39}$$

Direktes Aufstellen von i_0: Summe aller Stromquellen, die Strom zu betrachteten Knoten liefern. Das Vorzeichen ist positiv wenn der Strom zum Knoten fliesst.

Knotenspannungsvektoren

$$\underline{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \tag{11.40}$$

Lösung

$$L \cdot \underline{e} = \underline{i_0} \tag{11.41}$$

11.13 Messtechnik

11.13.1 Linearer Mittelwert (Average)

$$\overline{u}(t) = \frac{1}{T} \int_0^T u \, dt \tag{11.42}$$

11.13.2 Betragsmittelwert

$$|\overline{u}(t) = \frac{1}{T} \int_0^T |u| \, dt \tag{11.43}$$

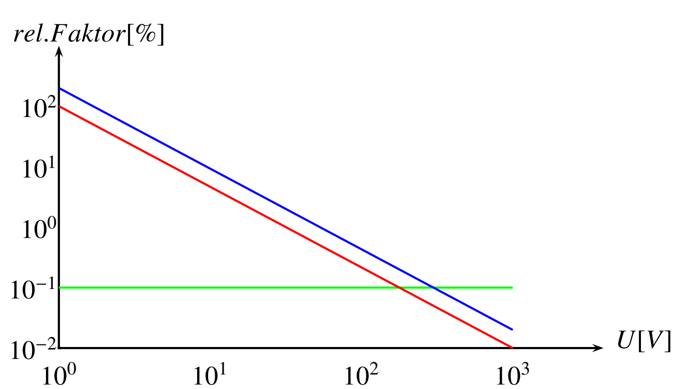
11.13.3 Quadratischer Mittelwert, Effektivwert

$$\overline{u^2} = \frac{1}{T} \int_0^T u^2 \, dt \tag{11.44}$$

$$u_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 \, dt} \tag{11.45}$$

11.13.4 Fehler von digitalen VA Multimetern

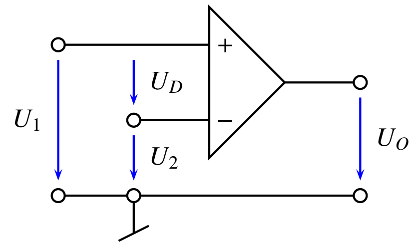
Fehler = ±(0.1% der Ablesung +0.2% des Messbereichs +1 Digit + spez. Fehler).



11.13.5 Crest-Faktor (Scheitelfaktor)

$$CF = \frac{\hat{U}}{U_{eff}} \qquad \text{Sinus: } CF = \sqrt{2} \tag{11.46}$$

11.13.6 Differenzbetrieb beim KO



Ideal: $u_o = v_D \cdot (u_1 - u_2)$
Real: $u_o = v_D \cdot (u_1 - u_2) \pm v_c \cdot \left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)$

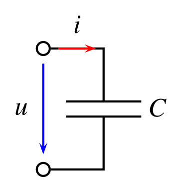
v_D : Differenzverstärkung
v_c : Commonmodeverstärkung
u_D : Commonmodespannung
CMMR : Commonmode Rejection Ratio
(Gleichtakt-Unterdrückungs-Verstärkung

$$u_0 = v_D \cdot u_D \cdot \left(1 \pm \frac{1}{\text{CMMR}} \cdot \frac{u_c}{u_D}\right) \qquad \text{mit} \quad \frac{1}{\text{CMMR}} = \frac{v_c}{v_D}$$

Verstärkung in $dB = 20 \cdot \log(v)$. Es gilt auch:

$$10 \leq \text{CMMR} \leq 10^4$$
$$20dB \leq \text{CMMR} \leq 80dB$$

11.14 Kapazität



$$i = C \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \tag{11.47}$$

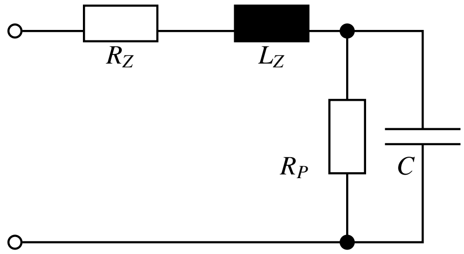
$$u = \frac{1}{C} \cdot \int_{t_0}^{t_1} i(\tau)\, d\tau + u_c(t=0) \tag{11.48}$$

11.14.1 Dirac-Stoss

$$i(t) = C \cdot u_o \cdot \delta(t) \quad \text{mit} \quad \delta(t) : \text{Dirac-Stoss} \tag{11.49}$$

Fläche: $C \cdot u_o$

11.14.2 Ersatzschaltbild



C	: Kapazität
R_p	: Isolationswiderstand
R_z	: Zuleitungswiderstand
L_z	: Zuleitungsinduktivität

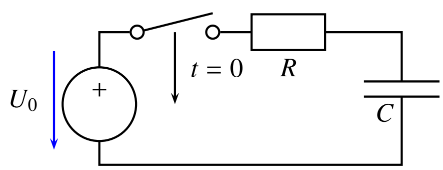
11.14.3 Parallelschaltung

$$C_{total} = \sum_{i=1}^{n} C_i \tag{11.50}$$

11.14.4 Serieschaltung

$$\frac{1}{C_{total}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i} \tag{11.51}$$

11.14.5 *U* und *I* in *RC*-Netzwerken



$$u_o = R \cdot C \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + u_c(t) \tag{11.52}$$

$$u_c(t) = u_o \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \tag{11.53}$$

$$i_c(t) = u_o \cdot \frac{1}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \tag{11.54}$$

$$p_c(t) = \frac{u_o^2}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \tag{11.55}$$

11.14.6 Kondensator als Energiespeicher

$$W = \frac{U_o^2 \cdot C}{2} = \frac{Q \cdot U_o}{2} \tag{11.56}$$

11.14.7 *U* und *I* bei Wechselstrom

$$u_c(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t) \tag{11.57}$$

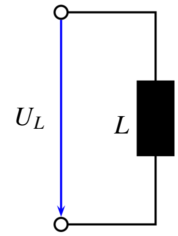
$$i_c(t) = -\omega \cdot C\omega\hat{u} \cdot \sin(\omega t) \tag{11.58}$$

$$i_c(t) = \omega \cdot C \cdot \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \tag{11.59}$$

Blindwiderstand:

$$\frac{\hat{u}}{\hat{i}} = \frac{\hat{u}_c}{\omega C \hat{u}_c} = \frac{1}{\omega C} = X_c \quad [\Omega] \tag{11.60}$$

11.15 Induktivität



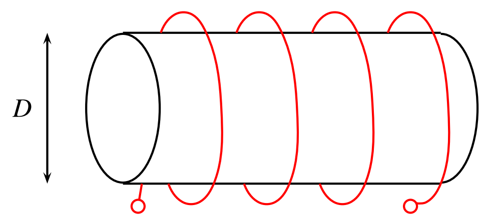
$$u_L(t) = L\frac{\partial i}{\partial t} \tag{11.61}$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t_1} u_L(\tau)\,d\tau + i_L(0) \tag{11.62}$$

L : Induktivität $[H]$

Hat die Eigenschaft, dass der Strom niemals springt!

11.15.1 Zylinderspule



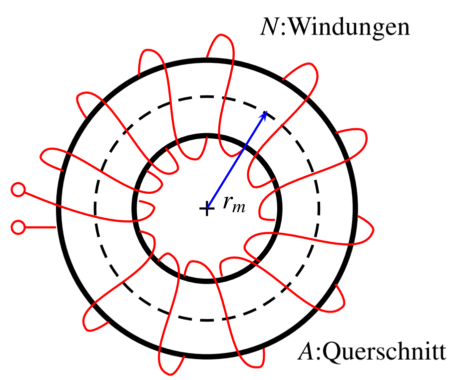
$$L = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{D^2 \cdot \frac{\pi}{4}}{l} \cdot N^2 \tag{11.63}$$

mit

$\mu_0 = 1.256 \cdot 10^{-6} \left[\frac{Vs}{Am}\right]$

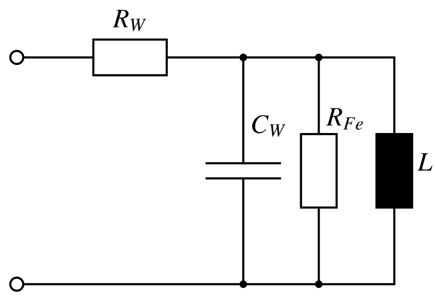
μ_r : Luft =1, Eisen =10^3

11.15.2 Ringkern



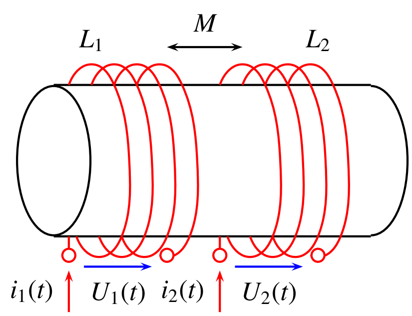
$$L = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{A}{2\pi \cdot r_m} \cdot N^2 \tag{11.64}$$

11.15.3 Ersatzschaltbild



R_ω	: Wicklungswiderstand
L	: Induktivitätswert
C_w	: Wicklungskapazität
R_{Fe}	: Kernverluste

11.15.4 Gekoppelte Spulen



L_1	: Induktivität der Spule 1
L_2	: Induktivität der Spule 2
M	: Gegeninduktivität (Kopplung)

ohne Streufluss:

$$u_1(t) = L_1 \frac{\partial i_1}{\partial t} + M \frac{\partial i_2}{\partial t} \tag{11.65}$$

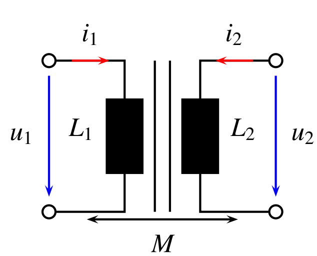
$$u_2(t) = L_2 \frac{\partial i_2}{\partial t} + M \frac{\partial i_2}{\partial t} \tag{11.66}$$

(11.67)

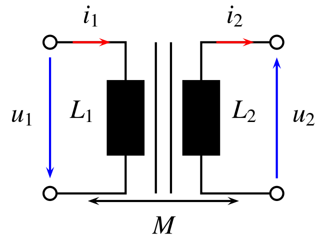
Kopplungsfaktor

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}} \qquad \text{mit} \quad 0 < k \leq 1 \tag{11.68}$$

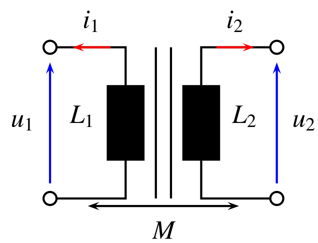
Keinen Streufluss: $k = 1$



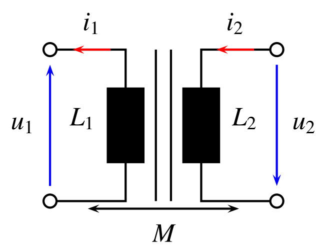
$$
\begin{aligned}
u_1 &= L_1 \frac{\partial i_1}{\partial t} + M \frac{\partial i_2}{\partial t} \\
u_2 &= L_2 \frac{\partial i_2}{\partial t} + M \frac{\partial i_1}{\partial t}
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
u_1 &= L_1 \frac{\partial i_1}{\partial t} - M \frac{\partial i_2}{\partial t} \\
u_2 &= L_2 \frac{\partial i_2}{\partial t} - M \frac{\partial i_1}{\partial t}
\end{aligned}
$$

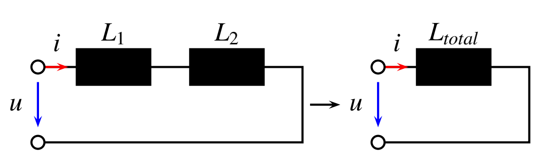


$$
\begin{aligned}
u_1 &= L_1 \frac{\partial i_1}{\partial t} + M \frac{\partial i_2}{\partial t} \\
u_2 &= L_2 \frac{\partial i_2}{\partial t} + M \frac{\partial i_1}{\partial t}
\end{aligned}
$$



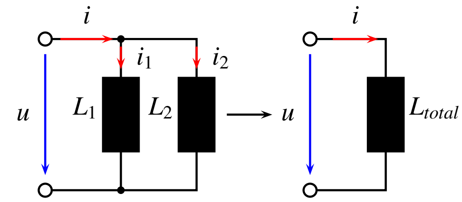
$$
\begin{aligned}
u_1 &= L_1 \frac{\partial i_1}{\partial t} - M \frac{\partial i_2}{\partial t} \\
u_2 &= L_2 \frac{\partial i_2}{\partial t} - M \frac{\partial i_1}{\partial t}
\end{aligned}
$$

11.15.5 Serieschaltung nichtgekoppelter Spulen



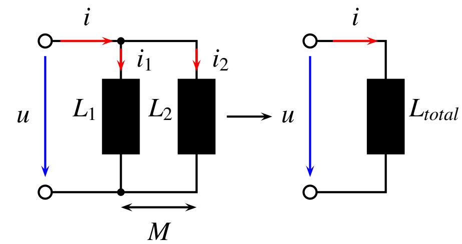
$$
L_{total} = \sum_{i=1}^{n} L_i \tag{11.69}
$$

11.15.6 Parallelschaltung nichtgekoppelter Spulen



$$\frac{1}{L_{total}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{L_i} \tag{11.70}$$

11.15.7 Parallelschaltung gekoppelter Spulen

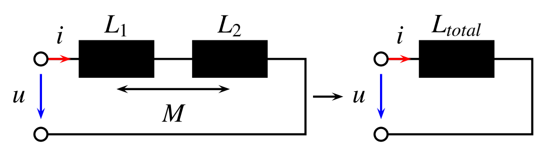


für die gezeigte Schaltung:

$$L_{total} = \frac{L_1 \cdot L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M} \tag{11.71}$$

<u>Achtung</u>: Orientierung beachten (siehe obige 4 Fälle)
$\Longrightarrow$ Gleichung ändert bei anderem Fall

11.15.8 Serieschaltung gekoppelter Spulen

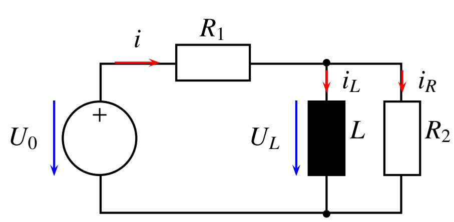


$$L_{total} = L_1 + L_2 + 2M \tag{11.72}$$

11.15.9 Blindwiderstand

$$L \cdot \omega = X_L \quad [\Omega] \tag{11.73}$$

11.15.10 *RL*-Schaltung



$$i_L(t) = \frac{U_o}{R_1} \cdot e^{\frac{R_2}{L} \cdot t} \tag{11.74}$$

$$u_L(t) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot U_o \cdot e^{-\frac{R_2}{L} \cdot t} \tag{11.75}$$

$$p_L(t) = -\left(\frac{U_o}{R_1}\right)^2 \cdot R_2 \cdot e^{-2\frac{R_2}{L} \cdot t} \tag{11.76}$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$

11.16 Wechselstromtheorie

11.16.1 Kennwerte und Kenngrössen

- Amplitude, Spitzenwert, Scheitelwert: $\hat{u}$, $\hat{i}$
- Kreisfrequenz: $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{\tau} \quad \left[\frac{rad}{s}\right]$
- Frequenz: $f = \frac{1}{T} \quad [Hz]$
- Periodenzeit, Periodendauer: $T = \frac{1}{f} \quad [s]$
- Nullphasenwinkel: ϕ_i, ϕ_u
- Momentanwert: $i(t)$, $u(t)$

11.16.2 Linearer Mittelwert

Arithmetischer Mittelwert:

$$\overline{u}(t) = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \phi_u)\, dt \tag{11.77}$$

11.16.3 Betragsmittelwert

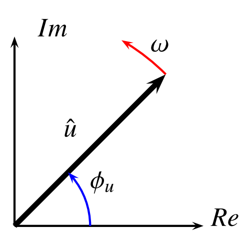
$$|\hat{u}| = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{u} \cdot |\cos(\omega t)|\, dt \tag{11.78}$$

11.16.4 Effektivwert

Geometrischer Mittelwert:

$$U = U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2\, dt} \tag{11.79}$$

11.16.5 Zeigerdarstellung



$$\underline{\hat{u}}(t) = \hat{u} \cdot e^{j\phi_u} \cdot e^{j\omega t} \tag{11.80}$$

$$\begin{aligned} \hat{u} \cdot e^{j\phi_u} \cdot e^{j\omega t} &= \underline{\hat{u}} \cdot e^{j\omega t} \\ &= \hat{u}\left[\cos(\phi_u) + j\sin(\phi_u)\right] \cdot e^{j\omega t} \\ &= \underline{\hat{u}}\left[\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\right] \end{aligned}$$

11.16.6 Bezeichnungen und Konventionen

$$\begin{aligned} \hat{u} &\quad : \text{Länge des Zeigers} \\ \omega &\quad : \text{Winkelgeschwindigkeit} \\ \phi_u &\quad : \text{Nullphasenlage} \end{aligned}$$

$$\underline{\hat{u}}(t) = \hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \phi_u)}$$

Komplexer Momentanwert

$$\underline{\hat{u}}(t) = \underline{\hat{u}} \cdot e^{j\omega t} \tag{11.81}$$

Komplexer Scheitelwert

$$\underline{\hat{u}} = \hat{u} \cdot e^{j\phi_u} \tag{11.82}$$

Reeller Momentanwert

$$u(t) = Re[\underline{\hat{u}}(t)] = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \phi_u) \tag{11.83}$$

Imaginärer Momentanwert

$$u(t) = Im[\underline{\hat{u}}(t)] = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \phi_u) \tag{11.84}$$

Komplexer Effektivwert

$$\underline{u} = \underline{u}_{eff} = \frac{\underline{\hat{u}}}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\phi_u} \tag{11.85}$$

11.16.7 Impedanz und Admittanz

$$\underline{Z} = \frac{\underline{\hat{u}}(t)}{\underline{\hat{i}}(t)} = \frac{\underline{\hat{u}}}{\underline{\hat{i}}} = R + jX \tag{11.86}$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{\hat{i}}(t)}{\underline{\hat{u}}(t)} = G + jB \tag{11.87}$$

Z : Scheinwiderstand, Impedanz
Y : Scheinleitwert, Admittanz
R : Wirkwiderstand, Resistanz
X : Blindwiderstand, Reaktanz
G : Wirkleitwert, Konduktanz
B : Blindleitwert, Suszeptanz

11.16.8 Bodediagramm

Zahlentafel:

$\frac{\omega}{\omega_v}$	$v \quad [dB]$	$\phi_z = \arctan(\frac{Im[\underline{v}]}{Re[\underline{v}]})$
0.01	0.000434	0.5729
0.10	0.0432	5.771
1.00	3.0103	45
10.00	20.043	84.289
100.00	40.004	89.43

11.16.9 Wechselstromleistung

Wirkleistung $P \quad [W]$

$$P = \overline{p}(t) = \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}}{2} \cdot \cos(\phi_u - \phi_i) \tag{11.88}$$

$$= u_{eff} \cdot i_{eff} \cdot \cos(\phi_u - \phi_i) \tag{11.89}$$

Blindleistung $Q \quad [VAR]$

$$Q = \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}}{2} \cdot \sin(\phi_u - \phi_i) \tag{11.90}$$

$$= u_{eff} \cdot i_{eff} \cdot \sin(\phi_u - \phi_i) \tag{11.91}$$

Scheinleistung S $[VA]$

$$S = u_{eff} \cdot i_{eff} \tag{11.92}$$

Leistungsfaktor

$$\cos(\phi) = \cos(\phi_u - \phi_i) = \frac{P}{S} \tag{11.93}$$

11.16.10 Netzwerk im Wechselstrom

Funktioniert gleich wie bei Gleichstrom mit der Unterscheidung:

- **mit magnetischer Kopplung:** Knotenspannungsmethode *nicht* geeignet.
- **ohne magnetischer Kopplung:** Knotenspannungs- sowie Maschenstrommethode geeignet.

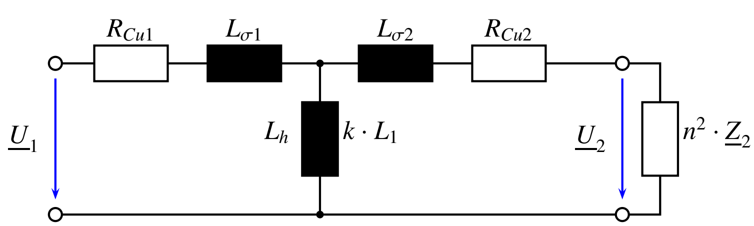
Mit magnetischer Kopplung:

$$\left[\begin{pmatrix} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \end{pmatrix} + K\right] \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} = \underline{u} \tag{11.94}$$

K : Kopplungsmatrix
Achtung: Orientierung der Spulen beachten! Machen möglichst nicht wo Kopplungen sind!

11.17 Transformator

11.17.1 Ersatzschaltbild



$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}} \qquad \text{Kopplungsfaktor}$$

11.17.2 Frequenzabhänigkeit

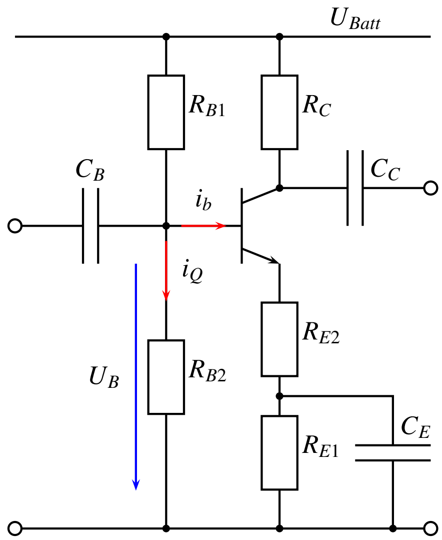
$$\underline{H}(\omega) = \frac{n \cdot \underline{u}_2(\omega)}{\underline{u}_1(\omega)} \tag{11.95}$$

$$\text{Hochpass:} \qquad \underline{H}(\omega) = \frac{j\omega T(\omega)}{1 + j\omega T(\omega)}$$

$$\text{Tiefpass:} \qquad \underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T(0)}$$

11.18 Verstärkertechnik

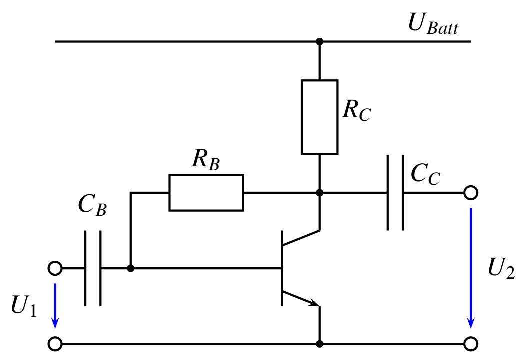
11.18.1 Gleichstromgegenkopplung



Regel: $i_Q \approx (5 \ldots 10) \cdot i_b$

$$u_B \approx \frac{U_{Batt}}{R_{B1} + R_{B2}} \cdot R_{B2}$$

11.18.2 Gleichspannungsgegenkopplung



11.18.3 Einseitiger Transistorverstärker