Formelsammlung - Mathematik - Diskrete Mathematik

Mario Konrad
Mario.Konrad@gmx.net

26. Oktober 2003

Inhaltsverzeichnis

1 Begriffe

Aussage "*p*"

Formal: p

$\mathcal{D}$: true/false, wahr/falsch, 1/0

Aussage "*nicht p*"

Formal: $\neg p$ (Negation)

$\mathcal{D}$: false/true, falsch/wahr, 0/1

Aussage "*P und Q*"

Formal: $p \wedge q$ oder $p \cdot q$ (Konjunktion)

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Aussage "*P oder Q*"

Formal: $p \vee q$ oder $p + q$ (Disjunktion)

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Aussage "*wenn P dann Q*"

Formal: $p \rightarrow q$ (Konditional)

p	q	$p \vee q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Aussage "*Q genau dann wenn P*"

Formal: $p \leftrightarrow q$ (Bikonditional)

p	q	$p \vee q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Aussage "*aus P folgt Q*"

Formal: $P \Longrightarrow Q$ (Folgerung)

Aussage "*P ist äquivalent zu Q*"

Formal: $P \Longleftrightarrow Q$ (Äquivalenz)

1.1 Allgemein

$$
\begin{aligned}
W, F, P, Q, \ldots &\quad \hat{=}\text{Atomare Bausteine, Atome, Formeln} \\
W, F &\quad \hat{=}\text{Wahrheitswerte}
\end{aligned}
$$

1.2 Prioritäten

	gleichbleibend $\longrightarrow$	
abnehmend $\downarrow$	$\neg$	
	$\wedge$	$\vee$
	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$

1.3 Allgemeingültigkeit

Eine Formel ist allgemeingültig, wenn sie für jede Belegung der Wahrheitswert W ergibt.
Auch *Tautologie* genannt.

1.4 Definitionen

Eine Formel heisst erfüllbar, wenn es min. eine Belegung gibt für die sie Wahr ist.
Eine Formel B folgt aus einer anderen Formel A, wenn für jede Belegung die A Wahr macht, B wahr wird.
Eine Formelmenge y folgt aus der Formelmenge x, wenn jede Formel aus y Wahr wird für Belegungen die x Wahr macht.
Zwei Formeln oder Formelmengen sind zueinander äquivalent, wenn sie gegenseitig auseinander Folgern.

2 Beweis-Strategien

2.1 Mögliche Strategien

- Beweis durch *Kontraposition*
- Beweis durch *Widerspruch*
- Beweis durch *Fallunterscheidung*
- *Direkter Beweis*
- *Induktionsbeweis*

2.2 Widersprüchlichkeit

Eine Formal A heisst *widersprüchlich*, wenn sowohl A als auch $\neg A$ für gleiche Belegungen Wahr werden.
Eine Formelmenge heisst Widersprüchlich, wenn für min. eine Formel obiges gilt.

3 Entscheidungsverfahren

Entscheidungsverfahren für Erfüllbarkeit entspricht einem *Algroithmus*
Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit und logische Folgerungen für endliche Formelmengen sind entscheidbar.
Umfang: Anzahl Zeilen der Wahrheitstabelle = $2^{\text{Anzahl Atome}}$

4 Normalformen

Ein *Literal* (L) entspricht einem aussagekräftigen Atom oder seiner Verneinung.

4.1 Konjunktive Normalform (KNF)

Formal: Produkt von Summen

$$\bigwedge_{j=1}^{n}\left(\bigvee_{i=1}^{m} L_{ij}\right) \tag{1}$$

- Sind nicht eindeutig bestimmt!
- Verschiedene Formeln können die gleiche KNF besitzen

4.2 Disjunktive Normalform (DNF)

Formal: Summe von Produkten

$$\bigvee_{j=1}^{n}\left(\bigwedge_{i=1}^{m} L_{ij}\right) \tag{2}$$

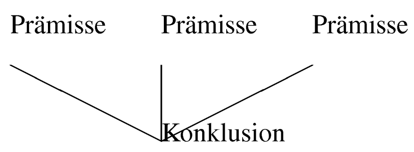
4.3 Ausgezeichnete Normalform

Alle Literale kommen in einem Disjunktionsterm bzw. Konjunktionsterm vor. Die ausgezeichnete Normalform ist nicht die kürzeste Möglichkeit eine Formel zu beschreiben.

- **Ausgezeichnete KNF:** Nullwerte (Falsch) in der Wahrheitstabelle betrachten
- **Ausgezeichnete DNF:** Einswerte (Wahr) in der Wahrheitstabelle betrachten

5 Ableitungen

$$\underbrace{A \quad \wedge \quad \neg A}_{\text{Prämisse}} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{F}_{\text{Konklusion}} \tag{3}$$



6 Boolsche Algebra

Grundmenge: $\mathbb{B} = \{0, 1\}$

6.1 Axiome

$$0 \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0 \tag{4}$$
$$0 + 1 = 1 + 0 = 1 + 1 = 0 \tag{5}$$
$$0 + 0 = 0 \tag{6}$$
$$1 \cdot 1 = 1 \tag{7}$$
$$\overline{0} = 1 \qquad \text{Komplement, Negation} \tag{8}$$
$$\overline{1} = 0 \qquad \text{Komplement, Negation} \tag{9}$$

6.2 Dualisieren

$$s^d \quad \hat{=} \quad \text{“}s \text{ dual”}$$

Inverseion der Funktionen und Operationen:

$$\begin{array}{ccc} + & \rightarrow & \cdot \\ \cdot & \rightarrow & + \\ 0 & \rightarrow & 1 \\ 1 & \rightarrow & 0 \end{array}$$

6.3 Normalformen

6.3.1 Disjuktive Normalform

Summe von Produkten

Siehe auch *disjunktive Normalform* in der Aussagenlogik.

6.3.2 Konjunktive Normalform

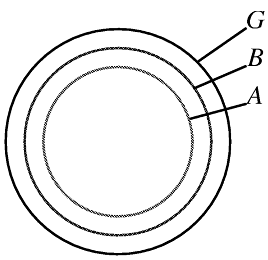
Produkt von Summen

Siehe auch *konjunktive Normalform* in der Aussagenlogik.

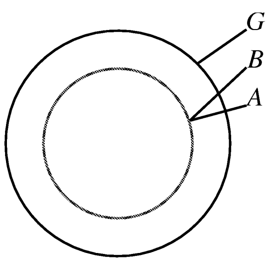
7 Mengen

7.1 Begriffe

7.1.1 Mengeh und Teilmengen



$$\mathbb{A} \subset \mathbb{B} \tag{10}$$



$$\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B} \quad \text{und} \quad \mathbb{B} \subseteq \mathbb{A} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbb{A} = \mathbb{B} \tag{11}$$

7.1.2 Leere Menge

$$\text{Leere Menge:} \qquad \emptyset \quad \text{oder} \quad \{\} \tag{12}$$

7.1.3 Standardmengen

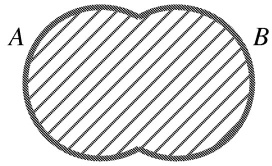
$\mathbb{N}, \mathbb{N}_0$	Natürliche Zahlen
$\mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}_0^+, \mathbb{Z}^-, \mathbb{Z}_0^-, \mathbb{Z}$	Natürliche ganze Zahlen
$\mathbb{Q}^+, \mathbb{Q}_0^+, \mathbb{Q}^-, \mathbb{Q}_0^-, \mathbb{Q}$	
$\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}^-, \mathbb{R}_0^-, \mathbb{R}$	reelle Zahlen
$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen

7.1.4 Potenzmenge

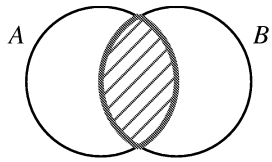
$\mathbb{P}(\mathbb{A})$ entspricht der Potenzmenge von $\mathbb{A}$. Die Potenzmenge ist die Menge aller Teilmengen, inkl. $\emptyset$.

7.2 Verknüpfungen

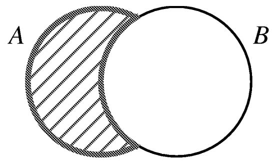
Vereinigung: $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$



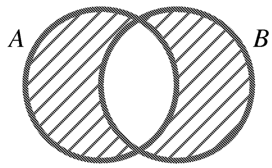
Schnittmenge: $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$



Differenz: $\mathbb{A} \backslash \mathbb{B}$



Symmetrische Differenz: $\mathbb{A} \triangle \mathbb{B}$



7.3 Dualisieren

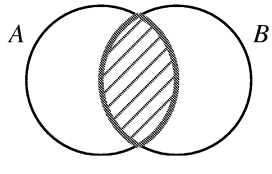
Ersetzen	durch
$\cup$	$\cap$
$\cap$	$\cup$
$\emptyset$	$\mathbb{G}$
$\mathbb{G}$	$\emptyset$

$$(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) \cup \emptyset = \mathbb{D} \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{D}^d = (\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) \cap \mathbb{G}$$

$$\mathbb{A} = \mathbb{B} \Longleftrightarrow \mathbb{A}^d = \mathbb{B}^d$$

7.4 Venn-Diagramm

Grafische Veranschaulichung von Mengen. Alternative zu Venn-Diagramm: Zugehörigkeitstabelle.



$$\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$$

7.5 Indexmenge

Zusammenfassung aller Werte, die ein Index annhemen kann.

$$\overline{\bigcup_{i \in \mathbb{I}} \mathbb{A}_i} = \bigcap_{i \in \mathbb{I}} \overline{\mathbb{A}_i} \qquad \overline{\bigcap_{i \in \mathbb{I}} \mathbb{A}_i} = \bigcup_{i \in \mathbb{I}} \overline{\mathbb{A}_i} \tag{13}$$

7.6 Mächtigkeit

$|\mathbb{A}|$ $\hat{=}$ Anzahl der Elemente von $\mathbb{A}$, sofern $\mathbb{A}$ endlich.
$card(\mathbb{A})$ $\hat{=}$ Mächtigkeit der Menge $\mathbb{A}$.
Für endliche Mengen: $card(\mathbb{A}) = |\mathbb{A}|$. Für unendliche Mengen dient $\mathbb{N}$ als Referenzmenge.

$$|\mathbb{A} \cup \mathbb{B}| = |\mathbb{A}| + |\mathbb{B}| - |\mathbb{A} \cap \mathbb{B}|$$
$$|\mathbb{A} \cup \mathbb{B} \cup \mathbb{C}| = |\mathbb{A}| + |\mathbb{B}| + |\mathbb{C}| - |\mathbb{A} \cap \mathbb{B}| - |\mathbb{A} \cap \mathbb{C}| - |\mathbb{B} \cap \mathbb{C}| + |\mathbb{A} \cap \mathbb{B} \cap \mathbb{C}|$$

8 Wahrscheinlichkeitstheorie

$$P = \frac{\text{Anzahl günstige Fälle}}{\text{Anzahl mögliche Fälle}} \tag{14}$$
$$P(\mathbb{A}) = p \qquad \text{mit} \quad p \in [0, 1]$$

9 Kombinatorik

9.1 Permutation

Die Permutation ist die Anordnung von n Elementen *ohne Wiederholung* und *mit Reihenfolge*.

$$P_n = n! \tag{15}$$

9.2 Variationen

Variationen ist die Anordnung von k Elementen aus insgesammt n *mit Reihenfolge*.

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{16}$$

"Anzahl Variationen von n Elementen zur k-ten Klasse"

9.3 Variationen mit Wiederholung

Es sind die Anordnung von k aus n Elementen *mit Wiederholung* und *mit Reihenfolge*.

$$^{w}V_n^k = n^k \tag{17}$$

9.4 Kombinationen

Kombinationen sind die Anordnung von k aus n Elementen *ohne Reihenfolge* und *ohne Wiederholung*.

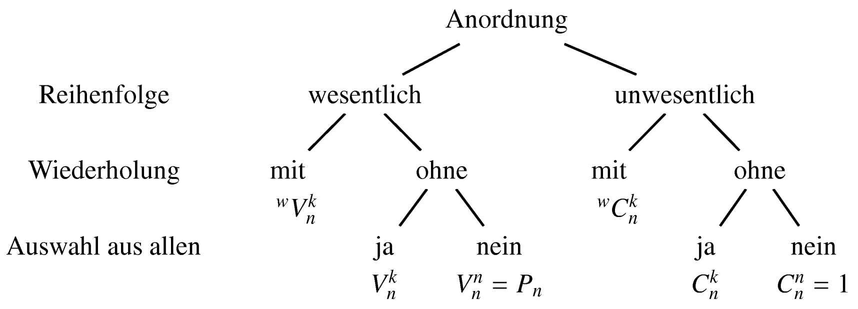
$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k} \tag{18}$$

9.5 Kombinationen mit Wiederholungen

Es ist die Anordnung von k aus n Elementen *mit Wiederholung* und *ohne Reihenfolge*.

$$^{w}C_n^k = \binom{n+k-1}{k} \tag{19}$$

9.6 Klassifizierung



$$P_n = n!$$
$${}^{w}V_n^k = n^k$$
$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$
$${}^{w}C_n^k = \binom{n+k-1}{k}$$
$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

10 Rekursionen

Eine Rekursion ist eine Beziehung einer Funktion an der Stelle n zu Werten an der Stelle $n-1, n-2, \ldots, n-k$.
Beispiel: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

11 Erzeugende Funktionen

Entspricht einer Auflösung einer Rekursion, mit welcher direkt das n-te Glied berechnet werden kann, anstatt von Anfang bis zum n-ten Glied durchzurechnen.
Definition: $a_0, a_1, \ldots$ sei eine Folge von reellen Zahlen, dann heisst die Funktion

$$f : x \mapsto a_0 + a_1 + a_2x^2 + \cdots \quad = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

ezeugende Funktion für die gegebene Zahlenfolge.

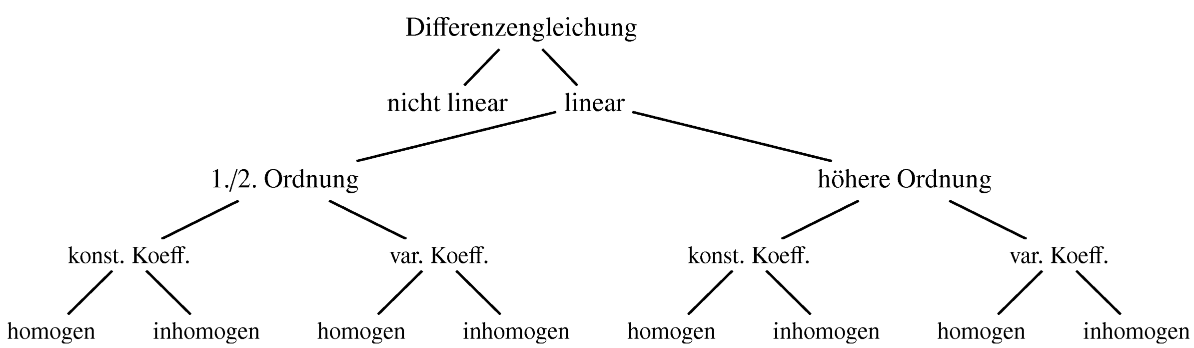
12 Differenzengleichungen

Auch Rekursinosgleichungen genannt.

12.1 Definition

Differenzengleichung k-ter Ordnung: $F(y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots, y_{t-k})$

12.2 Klassierung



Der Typ bestimmt die Lösungsmethode. Lösungsmethoden für lineare Differezengleichung mit konstanten Koeffizienten:

1. Z-Transformation
2. Konventionell
   (a) homogen
      i. mittels Ansatz
   (b) inhomogen
      i. mittels Ansatz vom Typ der Störfunktion
      ii. erzeugende Funktion
      iii. Operator-Technik

12.3 Lineare DGL, konst. Koeff, Homogen

Standardgleichung:

$$a_0 \cdot y_{t+n} + a_1 \cdot y_{t+n-1} + a_2 \cdot y_{t+n-2} + \cdots + a_n \cdot y_t = 0 \quad \forall t \tag{20}$$

Ansatz für Lösung: $y_t = c \cdot \lambda^t$

$$\Longrightarrow \qquad \begin{aligned} y_{t+1} &= c \cdot \lambda^{t+1} \\ y_{t+2} &= c \cdot \lambda^{t+2} \\ y_{t+n} &= c \cdot \lambda^{t+n} \end{aligned}$$

eingesetzt in DGL:

$$\begin{aligned} a_0 \cdot c \cdot \lambda^{t+n} + a_1 \cdot c \cdot \lambda^{t+n-1} + \cdots &= 0 \\ a_0 \cdot \lambda^{t+n} + a_1 \cdot \lambda^{t+n-1} + \cdots &= 0 \end{aligned}$$

Dies ist ein Polynom n-ten Grades, d.h. n Lösungen: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

12.4 Ansatz vom Typ der Störfunktion

Störfunktion	Ansatz für Lösung
β^t	$A \cdot \beta^t$
$\sin(\alpha t)$	$A \cdot \cos(\alpha t) + B \cdot \sin(\alpha t)$
$\cos(\alpha t)$	$A \cdot \cos(\alpha t) + B \cdot \sin(\alpha t)$
$P_m(t)$	$A_0 \cdot t^m + A_1 \cdot t^{m-1} + \cdots + A_m$
$\beta^t \cdot P_m(t)$	$\beta^t(A_0 \cdot t^m + A_1 \cdot t^{m-1} + \cdots + A_m)$
$\beta^t \cdot \sin(\alpha t)$	$\beta^t \cdot (A \cdot \cos(\alpha t) + B \cdot \sin(\alpha t))$

12.5 Unabhängigkeit der Lösung

Casorati-Determinante

$$\det \begin{pmatrix} (y_k)_1 & (y_k)_2 & \cdots & (y_k)_n \\ (y_{k+1})_1 & (y_{k+1})_2 & \cdots & (y_{k+1})_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (y_{k+n-1})_1 & (y_{k+n-1})_2 & \cdots & (y_{k+n-1})_n \end{pmatrix} \neq 0 \tag{21}$$

12.6 Komplexe Nullstellen

$$e^{j\phi} = \cos(\phi) + j\sin(\phi) \qquad \phi \in \mathbb{R} \tag{22}$$

$$\Longrightarrow \qquad c_s \cdot |\lambda_s|^k \cdot \cos(\phi \cdot k) + c_{s+1} \cdot |\lambda_s|^k \cdot \cos(\phi \cdot k) + \tag{23}$$

12.7 Lösen mittels erzeugende Funktion

$$\{a_k\} \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k = G(x) \tag{24}$$

Methode:

1. Multiplikation der DGL mit x^k
2. Summation der DGLs von $k = 0 \ldots \infty$
3. Vereinfachen unter Benutzung von $G(x)$, der erzeugenden Funktion
4. Isolierung der erzeugenden Funktion
5. Reihenentwicklung für erzeugende Funktion

13 Z-Transformation

$$\begin{array}{cccccc} (1) & \text{Differenzgleichung} & \circ\!\!-\!\!\bullet & \text{gewöhnliche Gleichung} & (2) \\ & & & \downarrow & \\ (4) & \text{Lösung der DGL} & \circ\!\!-\!\!\bullet & \underbrace{\text{Lösung der Gleichung}}_{\text{Bildbereich}} & (3) \end{array}$$

13.1 Definition

$$\{y_k\} \circ\!\!-\!\!\bullet Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k \cdot z^{-k} \qquad z \in \mathbb{C} \tag{25}$$

Kurzschreibweise:

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{z}\left(\{y_k\}\right) & = & Y(z) \\ \{y_k\} & \circ\!\!-\!\!\bullet & Y(z) \\ \mathfrak{z}(y_k) & = & Y(z) \end{array}$$

13.2 Eigenschaften

13.2.1 Linearität

$$\mathfrak{z}(ay_k + bx_k) = a \cdot \mathfrak{z}(y_k) + b \cdot \mathfrak{z}(x_k) \tag{26}$$

13.2.2 Indexverschiebung

$$\mathfrak{z}(y_{k+s}) = z^s \left(Y_{(z)} - \sum_{k=0}^{s-1} \frac{y^k}{z^k} \right) \tag{27}$$

$$\mathfrak{z}(y_{k-s}) = \frac{1}{z^s} \left(Y_{(z)} - \sum_{k=1}^{s} y_{-k} \cdot z^k \right) \tag{28}$$

13.2.3 Dämpfungssatz

$$\mathfrak{z}\left(y_k \cdot e^{-ak}\right) = Y(z \cdot e^a) \tag{29}$$

13.2.4 Differentiation im Bildbereich

$$\frac{\partial}{\partial z} Y(z) = -\frac{1}{z} \cdot \mathfrak{z}(k \cdot y_k) \tag{30}$$

13.2.5 Differentation nach einem Parameter

$$\mathfrak{z}\left(\frac{\partial}{\partial a} y_k(a)\right) = \frac{\partial}{\partial a} \mathfrak{z}\left(y_k(a)\right) \tag{31}$$

13.2.6 Faltungssatz

$$\mathfrak{z}(y_k) \cdot \mathfrak{z}(x_k) = \mathfrak{z}(y_k * x_k) \tag{32}$$

Faltung

$$y_k * x_k = \sum_{m=0}^{k} x_m \cdot y_{k-m} \tag{33}$$

14 Numerik

14.1 Definition

Maschinenzahlen sind die im Rechner *exakt* darstellbaren Zahlen.

```
DecimalToBaseB(x,a)    // 0 <= x(10) < 1
  a[0] = 0
  k = 0
  while (x != 0)
    k = k + 1
    a[k] = floor(B*x)
    x = B * x - a[k]
  end while
```

14.2 Festpunktzahlen

$$z = \sigma \cdot \sum_{i=m}^{n} a_i \cdot B^i \qquad m, n \in \mathbb{Z} \quad (\text{typ. } m < 0 < n) \tag{34}$$
$$\text{mit} \quad \sigma = \text{sign} = \pm 1 \qquad \text{und} \quad a_i \in [0, B-1]$$

14.2.1 Allgemeines

- grösste Maschinenzahl $B^{n+1} - B^m$
- gleichmässige Verteilung
- jede im Maschinenbereich liegende Zahl lässt sich durch eine Zahl z^* approximieren mit

$$|z - z^*| \leq \frac{1}{2} B^{-m}$$

- $(a \oplus B) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$
- $a \odot b \neq a \cdot b$

Vorteile

- effiziente Arithmetik

Nachteile

- kleiner Zahlenbereich

14.3 Gleitpunktzahlen

$$z = \sigma \cdot m \cdot B^e \qquad e \in \mathbb{Z} \text{ und } e \in [e_{min}, e_{max}] \tag{35}$$
$$\text{mit} \qquad m = \sum_{k=1}^{n} a_{-k} \cdot B^{-k} \qquad \text{mit} \quad a_k \in [0, B-1]$$

14.3.1 Definition

Eine Gleitpunktzahl ist normalisiert falls

$$\frac{1}{B} \leq m < 1$$

d.h. die f"hrende Ziffer der Mantisse $\neq 0$

14.3.2 Allgemeines

- Für die Null existiert keine normalisierte Darstellung
- Lücke bei Null: $[0, B^{e_{min}-1}]$ enthält keine Maschinenzahl
- Anzahl normalisierte Zahlen:

$$2(B-1) \cdot B^{n-1} \cdot \Delta e = 2 \cdot B^{n-1}(B-1)(e_{max} - e_{min} + 1)$$

- Anzahl denomalisierte Zahlen:

$$2 \cdot B^{n-1}$$

14.3.3 Definition

$$\mathbb{M} = M(B, n; e_0, e_1) = \left\{ z|\sigma \left(\sum_{k=1}^{n} a_{-k} \cdot B^{-k} \right) \cdot B^{-k}, e \in [e_0, e_1] \right\} \tag{36}$$

$a \in M(B, n, e_0, e_1)$ heisst Maschinenzahl, darstellbare Zahl.
Charakteristika von $\mathbb{M} = M(B, n, e_0, e_1)$

- Grösste darstellbare Zahl:

$$(1 - B^{-1} \cdot B^{e_1}$$

- betragsmässig kleinste

$$\text{normalisierte Zahl: } \frac{1}{B} \cdot B^{e_0} = B^{e_0 - 1}$$

$$\text{darstellbare Zahl grösser Null: } B^{\cdot n} \cdot B^{e_0} = B^{e_0 - n}$$

Allgemeines:

- ungleichmässig Verteilt
- Dichte nimmt bei wachsender Zahlengrösse exponentiell ab
- Approximationsfehler bei grossen Zahlen entsprechend grösser

15 Newton-Verfahren

15.1 Lineare Gleichungssysteme

$$x_{k+1})F(x_k) = x_k - \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{37}$$

Konvergenzgeschwindigkeit

$$\lim_{x \to a} F'(x) \tag{38}$$

Konvergenzfaktor

$$F'(s) \qquad \text{mit} \quad s : \text{Fixpunkt} \tag{39}$$

Konvergenzordnung

linear	$F'(s) \neq 0$	und	$\lvert F'(s)\rvert < 1$
quadratisch	$F'(s) = 0$	und	$F''(s) \neq 0$
kubisch	$F''(s) = F's(s) = 0$	und	$F''' \neq 0$

15.2 Nichtlineare Gleichungssysteme

$$\underline{f} = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

$$J_f = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} \qquad \text{Jacobi-Matrix}$$

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k - J_f^{(-1)} \cdot f \qquad \text{mit} \quad \underline{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vereinfachung:} \quad \underline{h} = -J_f^{(-1)} \cdot f \quad \Longrightarrow \underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + \underline{h}$$

16 Apriori Fehlerabschätzung

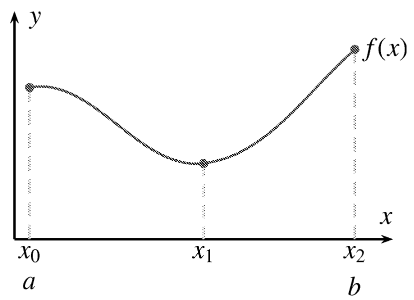
$$||x_n - x_k|| \leq L^k < frac11 - L \cdot ||x_1 - x_0|| \tag{40}$$

$$k \geq \frac{\ln\left(\epsilon \cdot (1-L) \cdot ||x_1 - x_0||^{-1}\right)}{\ln(L)} \tag{41}$$

17 Newton-Cotes-Regeln

Beispiel: Simpson

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) = \int_a^b f(x)\,dx \tag{42}$$



$$h = x_1 - x_0$$

18 Gauss-Quadratur

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} w_k \cdot f(x) \tag{43}$$

Genauigkeitsgrad: 2n-1

$$f \equiv 1 \qquad \int_a^b dx = b - a = \sum_{k=1}^{n} w_k$$

$$f \equiv x \qquad \int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} w_k \cdot x_k$$

$$f \equiv x^2 \qquad \int_a^b x^2\,dx = \underbrace{\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}}_{\underline{b}} = \sum_{k=1}^{n} w_k \cdot x_k^2$$

Vandermode-Matrix

$$V \cdot \underline{w} = \underline{b} \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{w} = V^{-1} \cdot \underline{b} \qquad \text{falls} \quad \det(V) \neq 0 \tag{44}$$

19 Orthogonal-Polynome

Skalarprodukt:

$$(f, g) = \int_a^b w_{(x)} \cdot f_{(x)} \cdot g_{(x)} \, dx$$

Orthogonalpolynome $p_0, p_1, p_2, \ldots,$ usw.

$$\begin{aligned} p_0 &= 1 \\ p_1 &= x + a \\ p_2 &= x^2 + bx + c \\ &\vdots \\ \text{usw.} \end{aligned}$$

Bedingung:

$$\begin{aligned} (p_0, p_1) &= 0 \\ (p_0, p_2) &= 0 \\ (p_1, p_2) &= 0 \\ &\vdots \\ \text{usw.} \end{aligned}$$

Alle Orthogonalpolynome müssen gegenseitig Skalarmultipliziert 0 ergeben $\Longrightarrow$ Gleichungssystem in a, b, c, usw.