Formelsammlung - Mathematik - Analysis

Mario Konrad
Mario.Konrad@gmx.net

26. Oktober 2003

Inhaltsverzeichnis

1 Allgemeines

1.1 Quadratische Gleichung

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \tag{1}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2}$$

1.2 Funktionsgleichung

$$y = m \cdot x + q \quad \text{mit m: Steigung, q: Achenabschnitt} \tag{3}$$

1.3 Achsenabschittsgleichung

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \tag{4}$$

1.4 Koordinatengleichung

$$Ax + By + C = 0 \tag{5}$$

1.5 Satz von Vieta

$$x_1 + x_2 = -p \tag{6}$$

$$x_1 \cdot x_2 = q \tag{7}$$

1.6 Binominalkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \tag{8}$$

2 Grenzwerte

$$\lim_{x \to c} f(x) = l \tag{9}$$

Sind die einseitigen Grenzwerte nicht gleich, so existiert kein Grenzwert:

$$\text{wenn } \lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x) \quad \Rightarrow \nexists \lim_{x \to c} f(x) \tag{10}$$

Standardgrenzwerte:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \tag{11}$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \tag{12}$$

$$\lim_{x\to c} \sin x = \sin c \tag{13}$$

$$\lim_{x\to c} \cos x = \cos c \tag{14}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{15}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0 \tag{16}$$

$$\lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n}} = 0 \qquad \text{sofern} \quad x > 0 \tag{17}$$

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \qquad \text{sofern} \quad |x| > 0 \tag{18}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \qquad \text{mit} \quad x \in \mathbb{R} \tag{19}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0 \qquad \text{für} \quad \alpha > 0 \tag{20}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \tag{21}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \qquad \text{mit} \quad x \in \mathbb{R} \tag{22}$$

3 Folgen

Monotonie:

$$a_n < a_{n+1} \qquad \text{Streng monoton wachsend} \tag{23}$$

$$a_n \leq a_{n+1} \qquad \text{Monoton wachsend} \tag{24}$$

$$a_n > a_{n+1} \qquad \text{Streng monoton fallend} \tag{25}$$

$$a_n \geq a_{n+1} \qquad \text{Monoton fallend} \tag{26}$$

$$\tag{27}$$

Divergenz: Folge ohne Grenzwert; unbeschränkte Folge
Konvergenz: Folge mit Grenzwert; beschränkte Folge

4 Differenation

4.1 Regeln

4.1.1 Potenzregel

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \tag{28}$$

4.1.2 Produktregel

$$(f(x) \cdot g(x))' = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x) \tag{29}$$

4.1.3 Summenregel

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \tag{30}$$

4.1.4 Skalar

$$(\alpha \cdot f(x))' = \alpha \cdot f'(x) \tag{31}$$

4.1.5 Reziprokregel

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)} \tag{32}$$

4.1.6 Quotientenregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \tag{33}$$

4.1.7 Kettenregel

Äussere Ableitung mal innere Ableitung.

$$(f(g(x)))' = \frac{\partial y}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \tag{34}$$

4.1.8 Sontiges

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x \tag{35}$$

$$f'\left(f^{-1}(x)\right) \cdot \left(f^{-1}(x)\right)' = 1 \tag{36}$$

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} \tag{37}$$

Winkelfunktionen

$$\sin' \Longrightarrow \cos \tag{38}$$

$$\cos' \Longrightarrow -\sin \tag{39}$$

$$\tan' \Longrightarrow \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2 \tag{40}$$

$$\cot' \Longrightarrow -\frac{1}{\sin^2} = -\left(1 + \cot^2\right) \tag{41}$$

$$\arcsin' \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{42}$$

$$\arccos' \Longrightarrow -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{43}$$

$$\arctan' \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \tag{44}$$

$$\left(\cot^{-1}\right)' \Longrightarrow -\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \tag{45}$$

Hyperbolische Funktionen

$$\frac{\partial}{\partial x} \sinh x = \cosh x \tag{46}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \cosh x = \sinh x \tag{47}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x} \tag{48}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{-1}{\sinh^2 x} \tag{49}$$

$$\tag{50}$$

4.2 Differential

$$\partial f = f'(x) \cdot \partial x \tag{51}$$

4.3 Newton-Raphson

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{x'(x_n)} \tag{52}$$

5 Implizites Differenzieren

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^3y - 4y - 2x + 1\right) = 0 \\ 9x^2y + 3x^3y' - 4y' - 2 + 0 = 0 \\ \implies \quad y' = \frac{2 - 9x^2y}{3x^3 - 4} \end{aligned}$$

6 Logarithmus

$$b = \log_a(x) \quad \hat{=} \quad \text{Exponent} \tag{53}$$
$$a^b = a^{\log_a(x)} = x \tag{54}$$
$$\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v) \tag{55}$$
$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v) \tag{56}$$
$$\log_a(u^n) = n \cdot \log_a(u) \tag{57}$$
$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} \tag{58}$$
$$(\ln(x))' = \frac{\partial}{\partial x}\ln(x) = \frac{1}{x} \tag{59}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\exp^x = \exp^x \tag{60}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\exp^y = \exp^y \cdot y' \tag{61}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\log_a(x) = \frac{1}{\ln(a) \cdot x} \tag{62}$$

7 Integration

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i{}^*) \cdot \Delta x_i \tag{63}$$

mit:

x:	fiktive Variable
a:	untere Grenze
b:	obere Grenze

Definition: Ein Integral ist der Grenzwert einer Summe.

Bezeichnungen:

$$F(x) = \int_a^b x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$$

mit:

$F(x)$	Stammfunktion
a	untere Grenze
b	obere Grenze
x	Integrand
dx	Differenzial
c	Integrationskonstante

Unbestimmtes Integral:

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(t) \hat{=} \text{Funktion in t} \tag{64}$$

Kurzschreibweise:

$$\int f(t)\,dt = F(t) \tag{65}$$

Bestimmtes Integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \hat{=} \quad \text{Zahl} \tag{66}$$

Berechnung:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b \tag{67}$$

7.1 Linearität des Integrals

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \tag{68}$$

$$\int_a^b \alpha \cdot f(x)\,dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\,dx \tag{69}$$

7.2 Standardsubstitution für Integrale mit Winkelfunktionen

$$u = \tan\frac{x}{2} \tag{70}$$

7.3 Grundintegrale

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \tag{71}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + c \tag{72}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan(x) + c \tag{73}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c \tag{74}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c \tag{75}$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c \tag{76}$$

$$\int \left(\lambda + x^2\right)dx = \lambda \cdot x + \frac{1}{3} \cdot x^3 + c \tag{77}$$

7.4 Integration Trigonometrischer Funktionen

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c \tag{78}$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c \tag{79}$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c \tag{80}$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c \tag{81}$$

$$\int \tan x \, dx = \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + c = -\ln\cos x + c \tag{82}$$

$$\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + c \tag{83}$$

$$\int \arcsin x \, dx = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c \tag{84}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx = \int \frac{1}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} \, dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c \tag{85}$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} \, dx = \frac{1}{a} \cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c \tag{86}$$

$$\int \arctan x \, dx = x \cdot \arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + c \tag{87}$$

7.5 Integration hyperbolischer Funktionen

$$\int \sinh x \, dx = \cosh x + c \tag{88}$$

$$\int \cosh x \, dx = \sinh x + c \tag{89}$$

7.6 Integrationsmethoden

7.6.1 Partielle Integration

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v \tag{90}$$

7.6.2 Substitution

$$\int_{g_u}^{g_o} \sin(2x) \, dx$$

Substitution durch:

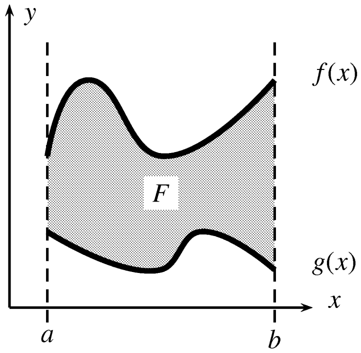
$$\begin{aligned} u &= 2x \\ du &= 2 \\ g_u' &= 2(g_u) \\ g_o' &= 2(g_o) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{g_u'}^{g_o'} \sin(u) \, du \tag{91}$$

7.6.3 Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{1}{x^2+x} \, dx \tag{92}$$

7.7 Fläche unter einer Kurve

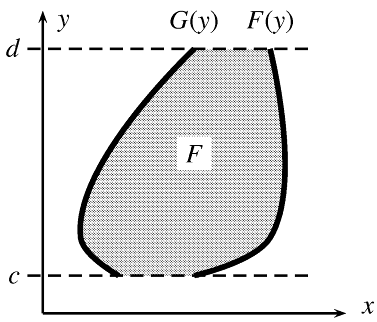


$$F = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx \tag{93}$$

Allgemein:

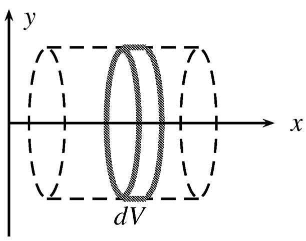
$$F = \int_a^b |f(x) - g(x)|\ dx \tag{94}$$

Analog dazu:



$$F = \int_c^d |F(y) - G(y)|\,dy$$

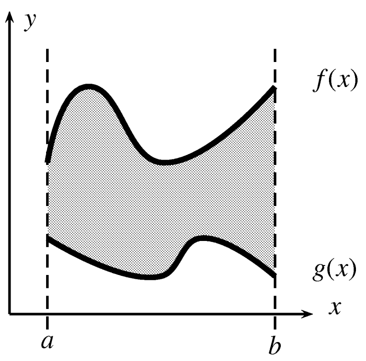
7.8 Volumenberechnung



$$dV = Q \cdot dx \quad \Longrightarrow \quad V = \int_a^b Q(x)\,dx \tag{95}$$

Q : Querschnittsfläche an der Stelle x. Kann eine Funktion von x sein.

Rotationskörper:



Rotation um die x-Achse.

$$V = \pi \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right] dx \tag{96}$$

7.9 Geometrischer Mittelpunkt: Schwerpunkt

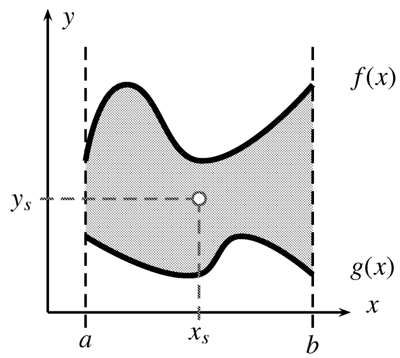
$$x_s = \frac{\int_a^b f(x) \cdot x \, dx}{\int_a^b f(x) \, dx} = \frac{\int_a^b x \, dF}{\int_a^b dF} \tag{97}$$

$$y_s = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) \, dx}{\int_a^b f(x) \, dx} = \frac{\int_a^b y \, dF}{\int_a^b dF} \tag{98}$$

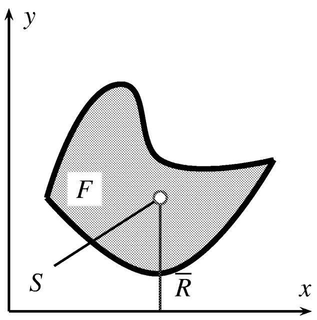
$$x_s \cdot A = \int_a^b [f(x) - g(x)] \cdot x \, dx \tag{99}$$

$$y_s \cdot A = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right] dx \tag{100}$$

Illustration:



7.10 Volumensatz von Pappos

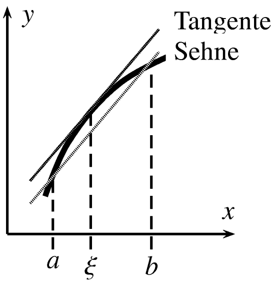


$$V = F \cdot 2 \cdot \pi \cdot \overline{R} \qquad \overline{R} \hat{=} \text{Mittlerer Radius} \tag{101}$$

7.11 Arbeit

$$dE, dA = \vec{F} \cdot d\vec{s} = ||\vec{F}|| \cdot \cos(\phi) \cdot ds \quad \Rightarrow \quad E = \oint_{weg} \vec{F}\, d\vec{s} \tag{102}$$

7.12 Mittelwertsatz



$$\exists \xi \in (a, b) \text{mit} f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \hat{=} \quad \text{mittlere Steigung} \tag{103}$$

8 Kurvendiskussion

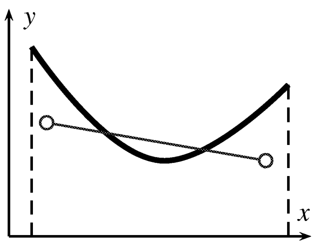
Notwendigkeit für lokales Extrem:

1. Ableitung verschwindet: $f'(x) = 0$
2. Ableitung existiert nicht (z.B. am Rand)

kleinstes lokales Minimum = globales Minimum
grösstes lokales maximum = globales Maximum

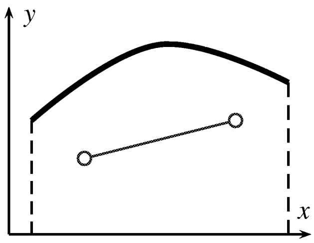
Konkav, wenn

- $f'' > 0$
- f' von neg. nach pos. übergeht



Konvex, wenn

- $f'' < 0$
- f' von pos. nach neg. übergeht



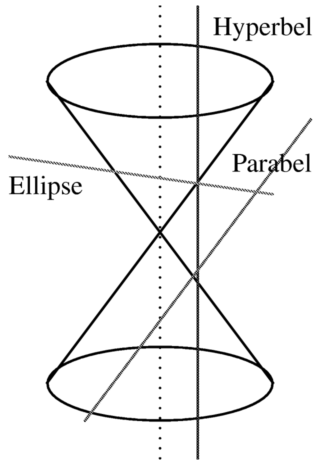
Wendepunkt, wenn $f'' = 0$.

9 Harmonische Bewegung

$$\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = 0 \tag{104}$$

$$x_t = A \cdot \cos(B \cdot t) + C \cdot \sin(D \cdot t) \tag{105}$$

10 Kegelschnitte



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \text{Ellipse} \tag{106}$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \text{Hyperbel} \tag{107}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \text{Kreis} \tag{108}$$

11 Hessesche Normalform: Abstand Punkt-Gerade

Hessesche Normalform:

$$Ax + By + C = 0 \tag{109}$$

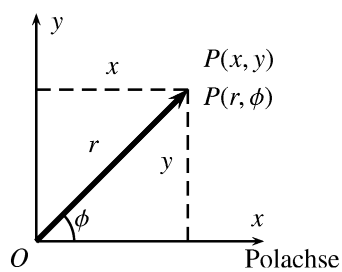
Abstand:

$$\left| \frac{A \cdot x_p + B \cdot y_p + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| \tag{110}$$

12 Polarkoordinaten

Darstellung ist eindeutig wenn:

$$r \geq 0 \qquad \text{und} \qquad \phi \in [0, 2\pi) \tag{111}$$



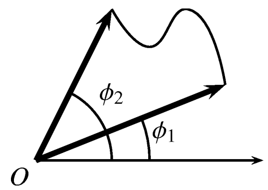
12.1 Transformationsgleichungen

$$x = r \cdot \cos\phi \tag{112}$$
$$y = r \cdot \sin\phi \tag{113}$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{114}$$
$$\phi = \arctan\frac{y}{x} \qquad \text{nicht eindeutig bestimmt!} \tag{115}$$

12.2 Beispiele von Kurven

- Kreis um Ursprung: r ist konstant
- Greade durch Ursprung: ϕ ist konstant
- beliebige Greade: $y = m \cdot x + q \quad \Rightarrow \quad r \cdot \sin\phi = m \cdot r \cdot \cos\phi + q$

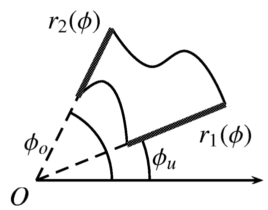
13 Flächeninhalt in Polarkoordinaten



∂F mit einem Kresissektor approximiert:

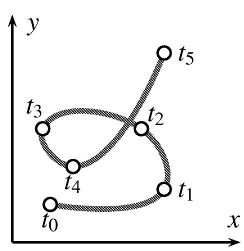
$$\partial F = \frac{r_\phi + r_{\phi+\partial\phi}}{2} \cdot (r \cdot \phi)\frac{1}{2} \tag{116}$$
$$\Longrightarrow \partial F = \left(\frac{r_\phi + r_{\phi+\partial\phi}}{2}\right)^2 \frac{1}{2}\partial\phi \tag{117}$$
$$\Longrightarrow F = \frac{1}{2}\int_{\phi_u}^{\phi_o} r_\phi^2 \partial\phi \tag{118}$$

13.1 Verallgemeinerung



$$F = \frac{1}{2}\int_{\phi_u}^{\phi_o} \left(r_1^2 - r_2^2\right)\partial\phi \tag{119}$$

14 Parametrische Kurven



Zwei von t abhängige Kurven $\Longrightarrow$ Parameter eliminieren. Illustration:

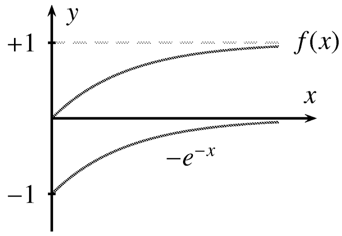
$$x = \cos t$$
$$y = \sin t$$
$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

14.1 Tangente

$$m_t = \frac{\dot{y}_t}{\dot{x}_t} \tag{120}$$

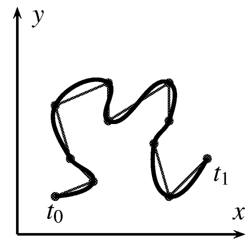
15 Axiom der kleinsten/grössten Schranke

$$f_{(x)} = 1 - e^{-x} \qquad \text{für} \quad x > 0 \tag{121}$$



$f_{(x)}$ schmiegt sich um $y = 1$ bleibt aber **immer** darunter ($y < 1$). 1 ist die kleinste obere Schranke für $f_{(x)}$.

16 Bogenlänge



Approximation des Streckenzugs zwischen t_0 und t_1.
Grenzübergang $\Delta t \to \partial t$

$$\Longrightarrow \qquad L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\, dt \tag{122}$$

$$\Longrightarrow \qquad L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(f'_{(x)}\right)^2}\, dx \tag{123}$$

16.1 Polarkoordinaten

$$x = r_{(\phi)} \cdot \cos\phi \tag{124}$$
$$y = r_{(\phi)} \cdot \sin\phi \tag{125}$$

$$\Longrightarrow \qquad L = \int_{\phi_0}^{\phi_1} \sqrt{(r')^2 + r^2}\, d\phi \qquad \text{wobei} \quad r' = \frac{\partial r}{\partial \phi} \tag{126}$$

17 Folgen

$$\{a_k\} \mathrel{\hat{=}} \quad a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \tag{127}$$
$$\{a_k\} \mathrel{\hat{=}} \quad a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \tag{128}$$

Beispiele: $a_k = \frac{1}{k}, a_k = \sqrt{k}$

17.1 Einzwänungungssatz für Folgen:

$$a_k < b_k < c_k \tag{129}$$

mit

$$\lim_{k\to\infty} a_k = a \qquad \text{und } a = c \lim_{k\to\infty} c_k = c \tag{130}$$

$$\Longrightarrow \qquad \lim_{k\to\infty} b_k = b \tag{131}$$

17.2 Satz:

Es sei $\{x_k\}$ eine konvergente Folge mit $\lim_{k\to\infty} x_k = a$ stetig in a, dann gilt:

$$\lim_{k\to\infty} f_{(x_k)} = f_{(a)} \tag{132}$$

18 Reihen

Folge $\{a_k\} \longmapsto \{S_n\}$ Reihe, Folge von Partialsummen wenn $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

$$\text{konvergent:} \qquad \lim_{n\to\infty} s_n < \infty \tag{133}$$

$$\text{divergent:} \qquad \lim_{n\to\infty} s_n \pm \infty \tag{134}$$

18.1 Reihenentwicklung verschiedener Funktionen

$$\sin x = x - \frac{1}{x!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 \pm \cdots \tag{135}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 \pm \cdots \tag{136}$$

$$\exp x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots \tag{137}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot x^k \tag{138}$$

18.2 Geometrische Reihe

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n \tag{139}$$

$$- \quad q \cdot s_n = q + q^2 + \cdots + q^n + q^{n+1} \tag{140}$$

$$\Longrightarrow s_n - q \cdot s_n = 1 - q^{n+1} \tag{141}$$

$$\Longrightarrow s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \tag{142}$$

Grenzwert $n \to \infty$

$$|q| < 1 \qquad \text{konvergent} \quad S = \frac{1}{1-q} \tag{143}$$

$$|q| \geq 1 \qquad \text{divergent} \tag{144}$$

$\sum a_k$ und $\sum b_k$ konvergent, dann ist auch $\sum(a_k + b_k)$ konvergent, und $\sum(\alpha a_k)$ auch konvergent.

18.3 Unbestimmte Ausdrücke

18.3.1 Von der Form $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to x^*} \frac{f_{(x)}}{g_{(x)}} = \lim_{x\to x^*} \frac{f'_{(x)}}{g'_{(x)}} \tag{145}$$

wenn $\frac{f_{(x)}}{g_{(x)}}$ ein unbestimmter Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$ ist (Regel von **l'Hospital**).

18.3.2 Von der Form $\frac{\infty}{\infty}$

Beispiel:

$$\lim \frac{x}{\exp x}, \lim \frac{\frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} \tag{146}$$

Lösung: gleiche Regel von l'Hospital

18.3.3 Uneigentliche Integrale

Beispiel:

$$\int_0^\infty \exp -x \, dx \tag{147}$$

Uneigentliches Integral: $I = \int_a^b f_{(x)} \, dx$ für ($a \to -\infty$) oder ($b \to +\infty$) oder ($a \to -\infty$ und $b \to +\infty$).

Wenn der Grenzwert existiert, nennt man das Integral *konvergent*, sonst *divergent*. Das Verhalten ist also abhängig von $f_{(x)}$.

Integrale von Funktionen mit einer Unendlichkeitsstelle Beispiel:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{|x|}} \, dx \tag{148}$$

Allgemein:

$$I = \int_a^b f_{(x)} \, dx \tag{149}$$

$$\text{mit} \quad \lim_{x \to b^-} f_{(x)} = \pm\infty \tag{150}$$

$$\text{oder} \quad \lim_{x \to a^+} f_{(x)} = \pm\infty \tag{151}$$

$$= \lim_{B \to b^-} \int_a^B f_{(x)} \, dx \tag{152}$$

$$\text{oder} \quad \lim_{A \to a^+} \int_A^b f_{(x)} \, dx \tag{153}$$

18.3.4 Integralkriterium

Ist eine Reihe konvergent oder divergent?
Beispiel: $f_{(x)} = \frac{1}{x^2}$

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{x^i} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \tag{154}$$

$$a_k = \frac{1}{k^2} \tag{155}$$

Annahme: $s < \infty$

$$s < 1 \cdot a_1 + \int_1^\infty f_{(x)} \, dx \tag{156}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} = \lim_{B \to \infty} \int_1^B \frac{1}{x^2} \, dx = \cdots = 1 \tag{157}$$

$\Longrightarrow$ Die Reihe ist also konvergent: $s < 2$

Allgemein

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \tag{158}$$

s ist konvergent wenn $\int_1^\infty f_{(x)} \, dx < \infty$

s ist divergent wenn $\int_1^\infty f_{(x)} \, dx$ divergiert mit $f_{(x)}$ als allgemeines Glied a_x.

18.3.5 Majorantenkriterium

Majorante: Dominiert die gegebene Reihe $s = \sum a_k$
Beispiel:

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^3+1} \qquad ak = \frac{1}{2k^3+1} \tag{159}$$

Majorante: $b_k = \frac{1}{k^3}$ (dominiert a_k, es ist $a_k < b_k \quad \forall k$). Konsequenz:

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k < \sum_{k=1}^{\infty} b_k \qquad \text{ist konvergent} \tag{160}$$

$$\Longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \text{ist auch konvergent} \tag{161}$$

18.3.6 Wurzelkriterium

Die Reihe $\sum a_k$ ist konvergent, wenn

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} < 1 \tag{162}$$

Die Reihe ist divergent, wenn

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} > 1 \tag{163}$$

(mit $a_k > 0$).
Wenn $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = 1$ ist, dann kann keine Aussage gemacht werden, d.h. ein anderes Kriterium muss verwendet werden.

18.3.7 Quotientenkriterium

Die Reihe ist konvergent wenn

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1 \tag{164}$$

und divergent wenn

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 \tag{165}$$

mit $a_k > 0 \quad \forall k$
Wenn $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = 1$ ist, dann kann keine Aussage gemacht werden, d.h. ein anderes Kriterium muss verwendet werden.

18.4 Absolute- und bedingte Konvergenz

Absolut konvergente Reihen sind jene, für die $\sum |a_k|$ konvergiert.
Wenn $\sum |a_k|$ konvergent ist, ist auch $\sum a_k$ konvergent.
Wenn $\sum a_k$ konvergiert aber $\sum |a_k|$ nicht konvergiert, dann ist die Reihe bedingt konvergent.

18.5 Alternierende Reihen

$(-1)^k \cdot a_k$ ergibt die alternierende Reihe

$$\sum (-1)^k a_k \tag{166}$$

Sie ist konvergent wenn

1. a_k monoton fallend ist.
2. $\{a_k\}$ konvergent gegen Null ist (**Leibnizkriterium**).

18.6 Taylorpolynome und Taylorreihen in x

(Brook Taylor, 1685-1731)

Hat eine Funktion auf dem Intervall $I = [0, x]$ $n+1$ stetige Ableitungen, dann gilt:

$$f_{(x)} = f_{(0)} + \frac{f'_{(0)}}{1!}x^1 + \frac{f''_{(0)}}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}_{(0)}}{n!}x^n + R_{n+1(x)} \tag{167}$$

$$R_{n+1(x)} = \frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}_{(t)}(x-t)^n\,dt \qquad \hat{=} \quad \text{Restglied} \tag{168}$$

$$R_{n+1(x)} = \frac{f^{(n+1)}_{(\xi)}}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad \text{mit} \quad \xi \in (0,x) \quad \text{oder} \quad \xi \in (0,n) \tag{169}$$

$T_{n(x)}$: Taylorpolynom n-ten Grades in x

Kann die Taylorreihe für eine Funktion nicht um den Nullpunkt entwickelt werden, dann:

$$f_{(x)} = \ln x \qquad 0 \notin \mathbb{D}_f \qquad \Longrightarrow \qquad \ln x + 1 \tag{170}$$

18.7 Taylorpolynom mehrdimensional

$$f_{(x,y)} = f_{(x_0,y_0)} + \begin{pmatrix} f_{x(x_0,y_0)} \\ f_{y(x_0,y_0)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \qquad \text{höhere Terme} \tag{171}$$

$$\begin{aligned} f_{(x,y)} = f_{(x_0,y_0)} + \frac{f_{x(x_0,y_0)}(x-x_0) + f_{y(x_0,y_0)}(y-y_0)}{1!} + \\ + \frac{f_{xx}(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(y-y_0)^2}{2!} + \cdots \end{aligned} \tag{172}$$

$$f_{(\vec{x})} = f_{(\vec{x_0})} + \frac{\nabla f_{(\vec{x_0})}}{1!}(\vec{x} - \vec{x_0}) + \cdots \tag{173}$$

18.8 Taylorpolynom und Taylorreihe in $x - a$

Funktion $f_{(x)}$ an der Stelle $a \hat{=} f_{(a)}$. Es wird nun eine Variablentransformation gemacht:

$$u = x - a \tag{174}$$

$$f_{(x)} \longmapsto g_{(u)} \tag{175}$$

Taylorpolynom für $g_{(u)}$ um den Nullpunkt:

$$g_{(u)} = T_{n(u)} + R_{n+1(u)} \tag{176}$$

Rücktransformation:

$$u = x - a \tag{177}$$

$$T_{n(u)} \quad \Longrightarrow \quad T_{n(x)} \tag{178}$$

$$R_{n+1(u)} \quad \Longrightarrow \quad R_{n+1(x)} \tag{179}$$

$$T_{n(x)} = \frac{f_{(a)}}{0!}(x-a)^0 + \cdots + \frac{f^{(n)}_{(a)}}{n!}(x-a)^n \tag{180}$$

$$R_{n+1(x)} = \frac{f^{(n+1)}_{(\xi)}}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{mit} \quad \xi \in (a,x) \quad \text{oder} \quad \xi \in (x,a) \tag{181}$$

18.9 Potenzreihen

Vergleich: Taylorreihe vs. Potenzreihe Taylorreihe:

$$f_{(x_0)} = \frac{f_{(x_0)}}{0!}(x-x_0)^0 + \frac{f'_{(x_0)}}{1!}(x-x_0)^1 + \cdots \tag{182}$$

Potenzreihe:

$$a_0(x-x_0)^0 + a_1(x-x_0)^1 + a_2(x-x_0)^2 + \cdots \tag{183}$$

Satz Ist die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$ für ein x_1 konvergent, dann ist sie für $|x| < |x_1|$ konvergent (absolute Konvergenz).

$\Longrightarrow$ Konvergenzradius

Analyse der Konvergenz mittels:

- Quotientenkriterium
- Wurzelkriterium
- Integralkriterium (Marjoranten)
- Leibniz (alternierende Reihen)

Satz Konvergente Potenzreihen können Gliedweise differenziert und integriert werden.
Beispiel:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^{\infty} \frac{\frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots}{x}\, dx \tag{184}$$

19 Konvergenzradius

19.1 Quotientenkriterium

Kriterium:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| < 1 \tag{185}$$

Konvergenzradius:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \tag{186}$$

19.2 Wurzelkriterium

Kriterium:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} < 1 \tag{187}$$

Konvergenzradius:

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{188}$$

Achtung: Analyse gilt im Interval $(-|x|, +|x|)$. Analyse für die Werte $\pm|x|$ muss separat durchgeführt werden.

20 Binominalreihen

$$(1+x)^{\alpha} = \binom{\alpha}{0} \cdot x^0 + \binom{\alpha}{1} \cdot x^1 + \binom{\alpha}{2} \cdot x^2 + \cdots \tag{189}$$

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots[a-(k-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \tag{190}$$

21 Krümmungskreis

Definition:

$$\kappa = \frac{\partial \phi}{\partial s} \tag{191}$$

$$\kappa = \frac{y''}{\left[1 + (y')^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\dot{x} \cdot \ddot{y} - \ddot{x} \cdot \dot{y}}{\left(\dot{x^2} + \dot{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{192}$$

Der Mittelpunkt liegt auf der Senkrechten zur Berührungstangente.
Radius des Krümmungskreises:

$$\rho = \frac{1}{|\kappa|} \tag{193}$$

22 Funktionen mehrerer Variablen

Funktion welche mehrere Variablen als Unabhängige besitzt:

$$f(x_1, x_2, x_3) \tag{194}$$
$$f(x_i) \tag{195}$$
$$f : (x, y, z) \longmapsto \cdots \tag{196}$$

oder als Fläche 2. Ordnung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A & \frac{D}{2} & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & B & \frac{F}{2} \\ \frac{E}{2} & \frac{F}{2} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \tag{197}$$

22.1 Höhenlinien, Niveauflächen

$$w = f(x, y, z) = A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D \tag{198}$$

ist der Ort, an welchem das gleiche Niveau herrscht (w ist konstant, x, y, z variabel), und das überall.

23 Partielle Ableitungen

Schreibweise:

$$f(x, y) \tag{199}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} \mathrel{\hat{=}} \quad \text{partielle Ableitung nach} \quad x \tag{200}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} \mathrel{\hat{=}} \quad \text{partielle Ableitung nach} \quad y \tag{201}$$
$$\tag{202}$$

Wird nach einer Variablen partiell differenziert, so sind die andern Variablen als konstant aufzufassen.

Partielle Ableitungen sind Grenzwerte:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \tag{203}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \tag{204}$$
$$\tag{205}$$

23.1 Stetigkeit

Eine stetige Funktion mehrerer Variablen ist in jeder Variablen für sich stetig.

23.2 Satz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \tag{206}$$
$$f_{xy} = f_{yx} \tag{207}$$

gilt wenn:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad \text{stetig sind.} \tag{208}$$

24 Gradient

Der Gradient ist die Richtung des steilsten Anstiegs.

$$\text{sei} \quad f : (x, y) \longmapsto f(x, y) \tag{209}$$

$$\text{grad}(f) = \nabla f = \overrightarrow{x}' = (x', y') \tag{210}$$

∇ : Nabla-Operator, partielle Ableitung nach jeder Variablen.

24.1 Satz

$$\nabla(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = \alpha \cdot \nabla f + \beta \cdot \nabla g \tag{211}$$

25 Richtungsableitung

Die Richtungsableitung entspricht dem Tangens des Steigungswinkels der Tangente, deren Projektion auf den Grundriss mit der vorgegebenen Richtung $\overrightarrow{u}$ zusammenfällt.

25.1 Satz

$$f'_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{x}) = \nabla f \circ \overrightarrow{u} \qquad \text{mit} \|\overrightarrow{u}\| = 1 \tag{212}$$

25.2 Satz

Für 2 bliebige Punkte A und B einer zusammenhängenden Menge gibt es einen verbindenden Polygonzug.

25.3 Satz

$$\nabla f = \overrightarrow{0} \qquad \Longrightarrow f \qquad \text{konstant} \tag{213}$$

25.4 Satz

$$\nabla f = \nabla g \qquad \Longrightarrow f \quad \text{und} \quad g \quad \text{unterscheiden sich nur durch eine Konstante} \tag{214}$$

25.5 Zwischenwertsatz

f stetig auf zusammenhängender Menge, dann wird falls $f(\overrightarrow{a}) = a$, $f(\overrightarrow{b}) = b$ jeden Wert zwischen a und b angenommen. c liegt zwischen a und b. Daraus folgt:

$$\exists \overrightarrow{c} \qquad \text{so dass} \qquad f(\overrightarrow{c}) = c \tag{215}$$

26 Ableitung entlang einer Kurve

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\overrightarrow{r}_{(t)}) = \nabla f(\overrightarrow{r}_{(t)}) \circ \dot{\overrightarrow{r}}_{(t)} \tag{216}$$

26.1 Satz

$$u_{(x,y)} = u\left(x_{(s,t)}, y_{(s,t)}\right) \tag{217}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \tag{218}$$

27 Maxima und Minima

Mehrdimensional: in dem max. bzw. min. Stellen ist die Tangentialebene horizontal:

$$\nabla f \perp \quad \text{auf Grundriss} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \nabla f = \underline{0} \tag{219}$$

Sattel: horizontale Tangentialfläche aber keine lokales Maximun oder Minimum.

Komponentenschreibweise der Tangentialfläche:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{220}$$

$B^2 - A \cdot C$

- > 0 : Sattelpunkt
- < 0
  - $A > 0$: lok. Min.
  - $A < 0$: lok. Max.

28 Lagrange-Funktion

Extremwerte mit Nebenbedingungen.

$$\begin{array}{ll} g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 & \text{1. Nebenbedingung} \\ g_2(x_1, \ldots, x_n) = 0 & \text{2. Nebenbedingung} \\ \vdots & \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) = 0 & \text{m. Nebenbedingung} \\ f(x_1, \ldots, x_n) & \text{zu min. oder max. Funktion} \end{array}$$

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i + g_i(x_1, \ldots, x_n) \tag{221}$$

29 Differentiale

Eindimensional:

$$df = f'(x)dx \tag{222}$$

Zweidimensional:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{223}$$

Dreidimensional:

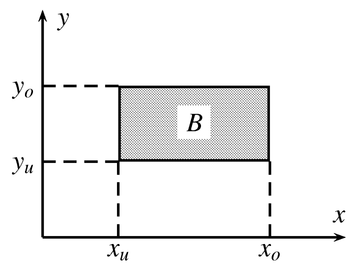
$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \tag{224}$$

30 Integrale

30.1 Doppelintegrale

$$I = \iint_{\mathbb{B}} f(x, y)\, dx\, dy \tag{225}$$

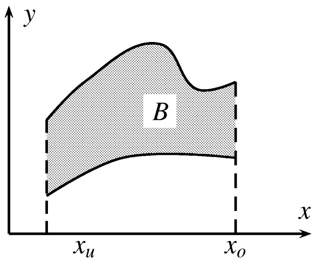
Doppelintegral über Rechteck:



$$I = \iint\limits_{\mathbb{B}} f(x,y)\,dx\,dy \tag{226}$$

$$I = \int_{x=x_u}^{x_o} \left(\int_{y=y_u}^{y_o} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{y=y_u}^{y_o} \left(\int_{x=x_u}^{x_o} f(x,y)\,dx \right) dy \tag{227}$$

Doppelintegral über beliebigem Bereich:



$$I = \int_{x=x_u}^{x_0} \left(\int_{y=h(x)}^{g(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \tag{228}$$

Die Grenzen des inneren Integrals sind Funktionen des äusseren Integrals.

Liegt ein allgemeiner Integrationsbereich vor, welcher nicht klare Grenzen in einer Achse bietet, so muss der Bereich unterteilt werden (sinnvolle Unterteilung!).

Das Koordinatensystem muss nicht unbedingt *kartesisch* sein. Polarkoordinaten erweisen sich als sehr nützlich $\longrightarrow$ sie vereinfachen die Rechnung teilweise erheblich! Beispiel: Volumen eines Kreiskegels.

Anwendungen:

- Massenberechnung: $M = \iint\limits_{\mathbb{B}} \rho(x,y)\,dx\,dy$
- Schwerpunkt: $x_s \cdot M = \iint\limits_{\mathbb{B}} x \cdot \rho(x,y)\,dx\,dy \qquad y_s \cdot M = \iint\limits_{\mathbb{B}} y \cdot \rho(x,y)\,dx\,dy$

30.2 Dreifachintegrale

$$I = \iiint\limits_{\mathbb{V}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \tag{229}$$

$$I = \int_x \left(\int_y \left(\int_z f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx \tag{230}$$

Die Reihenfolge der Integrale hängt von den Integrationsgrenzen ab, sie kann aber im Prinzip frei gewählt werden. Tipp: einfachste Reihenfolge wählen, sowohl bezüglich Grenzen als auch den Integralen.

30.3 Mehrfachintegrale

30.3.1 Variablensubstitution

$$I = \iint\limits_{\mathbb{B}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\mathbb{B}} f\left(x(u,v), y(u,v)\right) \cdot |D|\,du\,dv \tag{231}$$

D ist die Funktionaldeterminante oder *Jacobi-Determinate*:

$$D = \left| \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \right|$$

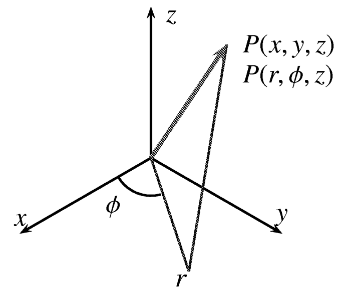
30.3.2 Koordinatentransformation 2D

Cartesische Koordinaten: $x, y \quad \longrightarrow \quad$ Polare Koordinaten: r, ϕ

$$x = r \cdot \cos(\phi)$$
$$y = r \cdot \sin(\phi)$$
$$D = r$$

Hier wird die Funktionaldeterminante entsprechend komplizierter (3x3 Matrix):

$$D = \det\begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix}$$



Cartesische Koordinaten: $x, y, z \quad \longrightarrow \quad$ Zylindrische Koordinaten: r, ϕ, z

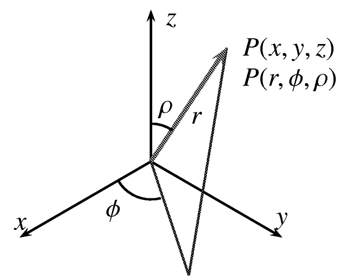
$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos(\phi) \\ y &= r \cdot \sin(\phi) \\ z &= z \\ \Longrightarrow \quad |D| &= r \end{aligned}$$

Cartesische Koordinaten: $x, y, z \quad \longrightarrow \quad$ Kugel- oder Sphärische Koordinaten: r, ϕ, ρ

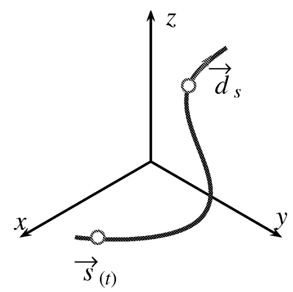
$$\begin{aligned} x &= r \cdot \sin(\rho) \cdot \cos(\phi) \\ y &= r \cdot \sin(\rho) \cdot \sin(\phi) \\ z &= r \cdot \cos(\rho) \end{aligned}$$

mit

$$0 \leq \rho \leq \pi \qquad \text{und} \qquad 0 \leq \phi \leq \pi$$
$$\Longrightarrow \qquad D = -r^2 \cdot \sin(\rho)$$



30.4 Kurvenintegrale



$$\vec{ds} = \dot{\vec{s}} \cdot dt \tag{232}$$

$$E = \oint dE = \oint \vec{k} \circ \vec{ds} = \int_{t_0}^{t_1} \left(\vec{k}_{(\vec{s}_{(t)})} \circ \dot{\vec{s}}_{(t)} \right) dt \tag{233}$$

30.4.1 Hauptsatz für Kurvenintegrale

Entspricht das Kraftfeld $\overrightarrow{k}$ dem Gradientenfeld, dann ist das Wegintegral zwischen zwei Punkten vom Weg unabhängig.

31 Differentialgleichungen (DGL)

31.1 Definition

Gewöhnliche Differengialgleichungen (DGL):

$$F\left(y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x), x\right) = 0 \tag{234}$$

entspricht einer Gleichung mit einer unabhängigen Variablen. Beispiel: $y'' + 5x = 0$

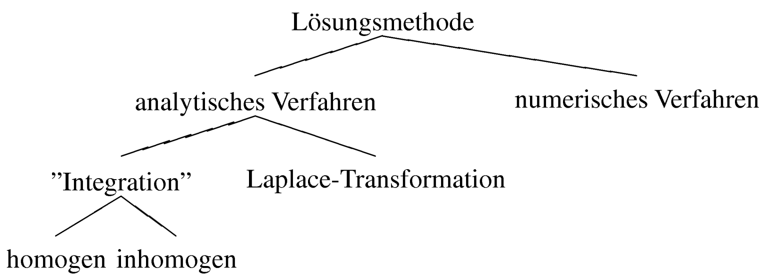
Definition: Die Ordnung der DGL entspricht der höchsten vorkommenden Ableitung.

Definition: Lineare DGL: y und deren Ableitungen treten ausschliesslich in der 1. Potenz auf.

Definition: Die Lösung der DGL ist eine Funktion welche die DGL erfüllt.

Die Konstanten sind Integrationskonstanten und werden mit Hilfe der Anfangs- und Randbedingungen bestimmt.

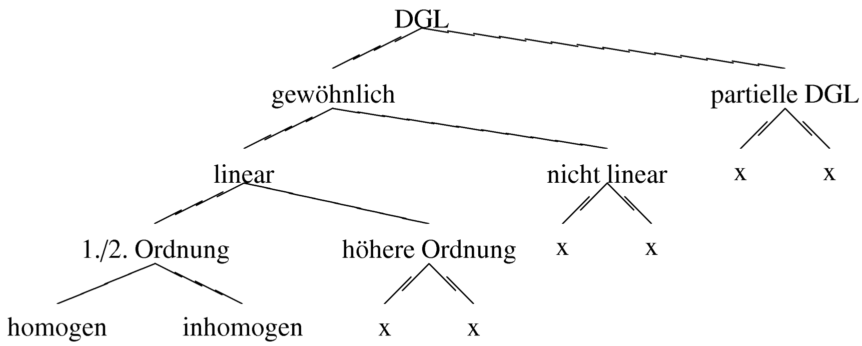
Definition: die Lösungsmethode ist ein Verfahren zur Gewinnung einer Lösung. Übersicht:



homogen: direkt, Separation, Substitution oder Ansatz

inhomogen: Ansatz, Variation der Konstanten, Reihenansatz

Lösungsmethoden sind nicht generell anwendbar, sondern vom Typ der DGL abhängig:



Dieser Baum ist symmetrisch aufgebaut, d.h. jeder mit 'x' gekennzeichnte Teilbaum hat die gleiche Struktur.

31.2 Fundamentalsatz

Die allgemeine Lösung einer linearen DGL ergit sich durch Addition der allgemeinen Lösung, der homogenen Lösung und einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL (spezielle oder partikuläre Lösung).

31.3 Satz:

Die homogene Lösung einer DGL n-ter Ordnung besteht aus n linear unabhängigen Komponenten.

31.4 Definition

n Funktionen $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ sind linear unabhängig, wenn es n Konstanten $c_1, \ldots, c_n$ gibt, mit $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n = 0$ für mindestens ein x, wobei nicht alle $c_i = 0$!

31.5 Satz:

Die Funktionen $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ seien differenzierbar. Sie sind linear unabhängig $\Longleftrightarrow$ Wronski-Determinante $\neq 0$.

31.6 Definition: Wronksi-Determinante

$$W(y_1, \ldots, y_n) = \det \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \tag{235}$$

31.7 DGL mit separierbaren Variablen

31.7.1 Definition

separierbare DGL (1. Ordnung) $\widehat{=}$ $\quad y' = f(x) \cdot g(y)$

Allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{y'}{g(y)} &= f(x) \\ \Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{g(y)} &= \int f(x)\,dx \\ \Longrightarrow \quad G(y) = F(x) \quad &\longrightarrow \quad \text{Auflösung nach} \quad y \end{aligned}$$

Regel:

1. Trennung der Variablen, d.h.: $G(y)\,dy = F(x)\,dx$
2. Integration
3. Auflösung nach y

31.8 DGL vom Typ $y' = f(ax + by + c)$

Kann durch Substitution $u = ax + by + c$ auf eine separierbare Form gebracht werden:

$$y' = f(ax + by + c)$$

Substituion:

$$u = ax + by + c \quad \Longrightarrow \quad u' = a + by'$$

dann ist

$$\begin{aligned} u' &= a + b \cdot f(u) \\ \frac{du}{dx} &= a + b \cdot f(u) \\ \int \frac{du}{a + b \cdot f(u)} &= \int dx = \boxed{\boldsymbol{x + c}} \end{aligned}$$

Regel:

1. Substitution $u = ax + by + c$
2. DGL in u bzw. u' formulieren
3. DGL lösen (separierbar)
4. Substitution auflösen und y bestimmen

31.9 DGL vom Typ $y' = \frac{y}{x}$

Regel:

1. Wahl der Substitution $u = \frac{y}{x}$
2. DGL in u bzw. u' formulieren
3. DGL lösen (separierbar)
4. Substitution auflösen und y bestimmen

31.10 Lineare DGL 1. Ordnung

31.10.1 Allgemein

$$y' = y \cdot g(x) + h(x)$$

1. Lösung der homogenen DGL: $y' - y \cdot g(x) = 0$ ist separierbar $\Longrightarrow \quad y_h = \dots$
2. Lösung der inhomogenen DGL: $y' - y \cdot g(x) = h(x)$
   (a) Variation der Konstanten
   (b) Ansatz vom Typ der Störfunktion

   $\Longrightarrow \quad y_{ih} = \dots$
3. $y = y_h + y_{ih}$
   Bestimmung der Konstanten mit Hilfe der Anfangs- oder Randbedingungen

31.10.2 Variation der Konstanten

$$y' = y + \sin(x) \qquad y(0) = 1$$

homogen:

$$y_h = c \cdot e^x$$

inhomogen:

$$\text{Ansatz:} \quad y_{ih} = k(x) \cdot e^x$$
$$y' = k' \cdot e^x + k \cdot e^x$$

eingesetzt:

$$\begin{aligned} k' \cdot e^x + k \cdot e^x &= k \cdot e^x + \sin(x) \\ k' &= e^{-x} \cdot \sin(x) \\ k(x) &= \int e^{-x} \cdot \sin(x)\, dx \\ &= \frac{e^{-x}}{2}(-\sin(x) - \cos(x)) + c \\ \Longrightarrow \quad y_{ih} = k(x) \cdot e^x &= \frac{1}{2}[-\sin(x) - \cos(x)] + c \cdot e^x \end{aligned}$$

31.10.3 Ansatz vom Typ der Störfunktion

Funktioniert wie bei den Differenzgleichungen. Ansätze für Störfunktionen:

Störfunktion	Ansatz
β^t	$A \cdot \beta^t$
$\sin(\alpha t)$	$A \cdot \cos(\alpha t) + B \cdot \sin(\alpha t)$
$\cos(\alpha t)$	$A \cdot \cos(\alpha t) + B \cdot \sin(\alpha t)$
Polynom $P_m(t)$	$A_0 \cdot t^m + A_1 \cdot t^{m-1} + \cdots + A_m$
$\beta^t \cdot P_m(t)$	$\beta^t \cdot \left(A_0 \cdot t^m + A_1 \cdot t^{m-1} + \cdots + A_m\right)$
$\beta^t \cdot \sin(\alpha t)$	$\beta^t \cdot (A \cdot \cos(\alpha t) + B \cdot \sin(\alpha t))$
$\beta^t \cdot \cos(\alpha t)$	$\beta^t \cdot (A \cdot \cos(\alpha t) + B \cdot \sin(\alpha t))$

31.11 DGL höherer Ordnung

Allgemeine DGL 2. Ordnung:

$$a(x) \cdot y'' + b(x) \cdot y' + c(x) \cdot y = y(x) \tag{236}$$

homogene DGL: **nicht separierbar!** $\longrightarrow$ charakteristisches Polynom
Ansatz: $y_h = c \cdot e^x$, bei doppelten Nullstellen: $y_h = c \cdot x \cdot e^x$, bei dreifachen Nullstellen: $y_h = c \cdot n^2 \cdot e^x$

Beispiel: $y'' - 8y' + 16y = 0$ (Nullstellen: 4, 4)

$$\Longrightarrow \quad y_h = c_1 \cdot e^{4x} + c_2 \cdot x \cdot e^{4x}$$

Beispiel: Nullstellen: $-2 \pm 3j$

$$\begin{aligned} & y_h = c_1 \cdot e^{-2x} \cdot e^{3j} + c_2 \cdot e^{-2x} \cdot e^{-3j} \\ \Longrightarrow \quad & y_h = c_1 \cdot e^{-2x} \cos(3x) + c_2 \cdot e^{-2x} \cdot \sin(3x) \end{aligned}$$

31.12 DGL-Systeme

Jede lineare DGL höherer Ordnung lässt sich auf ein DGL-System 1. Ordnung zurückführen (und umgekehrt).
Beispiel: $y^{(4)} - 16 \cdot y = e^x$

$$\begin{aligned} z_1(x) &= y(x) \\ z_2(x) &= y' \\ &\vdots \\ z_5(x) &= y^{(4)} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad z_4' - 16 \cdot z_1 = e^x$$

$$\dot{\vec{z}} = \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 16 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^x \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{z}} = A \cdot \vec{z} + \vec{g}$$

32 Laplace-Transformation

32.1 Definition

$$f(t) \longmapsto \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-s \cdot t}\, dt = F(s) \tag{237}$$

Laplace-Transformation oder Integral-Transformation
$f(t)$ $\hat{=}$ Zeitfunktion $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^+$
$F(s)$ $\hat{=}$ Laplace-Transformierte von f

Kurzschreibweise:

$$\begin{array}{rcl} f(t) & \circ\!\!-\!\!\bullet & F(s) \\ & \mathscr{L} & \\ f & \circ\!\!-\!\!\bullet & F \\ F(s) & = & \mathscr{L}(f(t)) \end{array}$$

32.1.1 Satz

Jede stetige auf $[0, \infty)$ definierte Zeitfunktion $f(t)$, die durch eine Exponentialfunktion begrenzt ist, kann transformiert werden.

32.1.2 Satz

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0 \tag{238}$$

32.2 Eigenschaften

32.2.1 Linearität

$$\mathscr{L}\left(c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t)\right) = c_1 \cdot F_1(s) + c_2 \cdot F_2(s) \tag{239}$$

32.2.2 Variablentransformation

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s) \quad \Longleftrightarrow \quad f(a \cdot t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right) \quad \text{für} \quad a > 0 \tag{240}$$

Verschiebungssatz im Bildbereich:

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s) \quad \Longleftrightarrow \quad e^{a \cdot t} \cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s-a) \tag{241}$$

Verschiebungssatz im Zeitbereich:

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s) \quad \Longleftrightarrow \quad f(t-a) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-s \cdot a} \cdot F(s) \quad \text{für} \quad a > 0 \tag{242}$$

32.2.3 Differentiation im Zeitbereich

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s) \quad \Leftrightarrow \quad f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet s \cdot F(s) - f(f) \tag{243}$$

$$f \circ\!\!-\!\!\bullet F \quad \Leftrightarrow \quad f^{(n)} \circ\!\!-\!\!\bullet s^n \cdot F(s) - s^{n-1} \cdot f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \tag{244}$$

32.2.4 Integration im Zeitbereich

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s) \quad \Longleftrightarrow \quad \int_0^t f(\tau)\, d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s} F(s) \tag{245}$$

$$t^n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{s^{n+1}} \tag{246}$$

32.2.5 Differentiation im Bildbereich

$$F(s) \bullet\!\!-\!\!\circ f(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d^n}{ds^n} F(s) \bullet\!\!-\!\!\circ (-1)^n \cdot t^n \cdot f(t) \tag{247}$$

32.2.6 Integration im Bildbereich

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s) \iff \frac{1}{t} f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \int_s^\infty F(u)\, du \tag{248}$$

32.2.7 Periodische Funktionen

$f(t)$ in T periodisch.

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s) = \int_0^T e^{-s\cdot\tau} \cdot f(\tau)\, d\tau \cdot \frac{1}{1 - e^{-s\cdot T}} \tag{249}$$

32.2.8 Grenzwerte

$$f(0) = \lim_{s\to\infty} s \cdot F(s) \qquad f(\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot F(s) \tag{250}$$

32.2.9 Faltung

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(u) \cdot g(t-u)\, du \tag{251}$$

$$f(t) * g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s) \cdot G(s) \tag{252}$$

32.3 Rationale Bildfunktionen

$$F(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \qquad \text{Grad Zähler ¡ Grad Nenner} \tag{253}$$

32.3.1 Rücktransformation

$$\frac{Q(s)}{P(s)} = F(s) \bullet\!\!-\!\!\circ f(t)$$

Annahme: $P(s)$ hat einfache Nullstellen s_i

$$\Longrightarrow \quad F(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} + \cdots + \frac{A_n}{s - s_n}$$

$$\text{mit} \quad A_i = F(s) \cdot (s - s_i) \quad \text{mit} \quad s = s_i$$

$$\frac{A_i}{s - s_i} \bullet\!\!-\!\!\circ A_i \cdot e^{s_i \cdot t} \begin{cases} s_i \text{ ist reell} & \Longrightarrow \quad A_i \cdot e^{s_i\cdot t} \quad \text{ist reell} \\ s_i \text{ komplex;} & s_i = x + j\beta \end{cases}$$

Im komplexen Fall:

$$\frac{A_i}{s - s_i} + \frac{\overline{A_i}}{s - \overline{s_i}} \bullet\!\!-\!\!\circ A_i \cdot e^{s_i\cdot t} + \overline{A_i} \cdot e^{\overline{s_i}\cdot t}$$

$$= c_i \cdot e^{\alpha\cdot t} \cdot \cos(\beta \cdot t) + c_2 \cdot e^{\alpha\cdot t} \cdot \sin(\beta \cdot t)$$

32.4 Lösen einer DGL

1. Laplate-Transformation der DGL in eine gewöhnliche Gleichung
2. Lösen der Gleichung
3. Rücktransformation mit Erhalt der Lösung der DGL

32.5 Lineare DGL mit variablen Koeffizienten

Allgemeine Form:

$$A(t) \cdot y^{(m)}(t) + B(t) \cdot y^{(m-1)}(t) + \cdots + N(t) \cdot y(t) = g(t) \tag{254}$$

Herleitung allgemeiner Term:

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$$

Differentiation im Bildbereich:

$$(-1)^n \cdot t^n \cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

Differentiation im Zeitbereich:

$$f^{(k)} \circ\!\!-\!\!\bullet s^k \cdot F(s) - s^{k-1} \cdot f(0) - s^{k-2} \cdot f'(0) - \cdots - f^{(k-1)}(0)$$

$$\Longrightarrow \quad (-1)^n \cdot t^n \cdot k^{(k)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{d^n}{ds^n} \left(s^k \cdot F(s) - s^{k-1} \cdot f(0) - \cdots - f^{(k-1)}(0) \right)$$

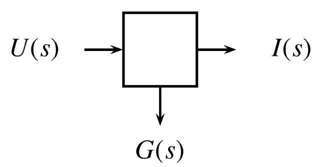
32.6 Elektrische Schwingkreise

R	$r \cdot i(t)$	$R \cdot I(s)$
C	$\frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(\tau)\, d\tau$	$\frac{1}{C} \cdot \frac{I(s)}{s}$
L	$L \cdot \frac{di}{dt}$	$L \cdot (s \cdot I(s) - i(0))$
Problem	$u(t) \rightarrow \square \rightarrow i(t)$	$U(s) \rightarrow \square \rightarrow I(s)$

<u>Definition:</u> eine Übertragungsfunktion ist jene Funktion, die eine Anregungsfunktion $u(t)$ in eine Antwort $i(t)$ verwandelt.

<u>Definition:</u> eine Übertragung heisst **linear**, wenn im Bildbereich die Antwort aus einer Multiplikation von Anregungs- und Übertragungsfunktion (beide Laplace-Transformiert) berechnet werden kann.

Illustration:

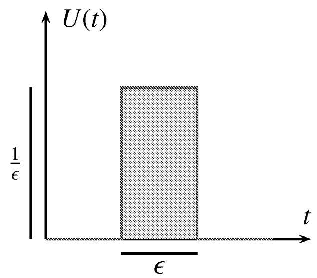


Prinzip von Duhamel:

$$i_{(t)} = \int_o^t g_{(t-\tau)} \cdot u_{(\tau)}\, d\tau \tag{255}$$

Behauptung:

$$\mathscr{L}^{-1}(u_{(s)}) = \mathscr{L}^{-1}(1) \hat{=} \text{ Einheitsstoss}$$



33 Fourier-Reihen

Eine beliebige periodische Funktion lässt sich aus anderen Periodischen zusammensetzen.

33.1 Fourier-Reihe

$$f \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} [a_k \cdot \cos(\omega_k \cdot t) + b_k \cdot \sin(\omega_k \cdot t)] \tag{256}$$

33.2 Wavelets

$$f \longmapsto \sum_{i=0}^{\infty} c_i \cdot y_i \tag{257}$$

33.3 Skalarprodukt zweier Funktionen

$$\vec{f} \circ \vec{g} = \int_0^{2\pi} f_{(t)} \cdot g_{(t)}\, dt \tag{258}$$

$$\text{mit } \vec{t} = \begin{pmatrix} f_{(0)} \\ \vdots \\ f_{(2\pi)} \end{pmatrix} \text{ und } \vec{g} = \begin{pmatrix} g_{(0)} \\ \vdots \\ g_{(2\pi)} \end{pmatrix}$$

33.4 Entwicklung einer 2π-per. Funktion in eine Fourier-Reihe

$f_{(t)}$ ist 2π-periodisch. Ansatz:

$$f_{(t)} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cdot \cos(kt) + b_k \cdot \sin(kt)]$$

Skalarmultiplikation mit $cos(0 \cdot t) = 1$:

$$\int_0^{2\pi} f_{(t)} \cdot 1\, dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cdot \cos(kt) + b_k \cdot \sin(kt)] \right) dt$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_{(t)}\, dt \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_{(t)} \cdot \cos(kt)\, dt \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_{(t)} \cdot \sin(kt)\, dt \end{aligned}$$

33.5 Entwicklung einer t-per. Funktion in ene Fourier-Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot \cos\left(k \frac{2\pi}{T} \tau\right) + b_k \cdot \sin\left(k \frac{2\pi}{T} \tau\right) \right] \tag{259}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^{T} f_{(\tau)}\, d\tau \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_0^{T} f_{(\tau)} \cdot \cos\left(k \frac{2\pi}{T} \tau\right) d\tau \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_0^{T} f_{(\tau)} \cdot \sin\left(k \frac{2\pi}{T} \tau\right) d\tau \end{aligned}$$

33.6 Grundfrequenz, Harmonische

$$\text{Grundfrequenz:} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \tag{260}$$

$$\text{k-te harmonische Frequenz:} \qquad \omega_k = k \cdot \frac{2\pi}{T} = k \cdot \omega \tag{261}$$

$$f_{(t)} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cdot \cos(\omega_k t) + b_k \cdot \sin(\omega_k t)]$$

mit

$$a_k = \frac{2}{T} \int\limits_{(T)} f_{(t)} \cdot \cos(\omega_k t)\, dt \qquad \text{für} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$
$$b_k = \frac{2}{T} \int\limits_{(T)} f_{(t)} \cdot \sin(\omega_k t)\, dt \qquad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots$$

33.7 Komplexe Fourier-Reihe

$$f_{(t)} = e^{j\omega_k t} \frac{a_k - jb_k}{2} + e^{-j\omega_k t} \frac{a_k + jb_k}{2} \tag{262}$$
$$= e^{j\omega_k t} c_k + e^{-j\omega_k t} c_{-k} \tag{263}$$
$$c_k = \frac{1}{T} \int\limits_{(T)} f_{(t)} \cdot e^{j\omega_k t}\, dt \tag{264}$$
$$c_{-k} = \frac{1}{T} \int\limits_{(T)} f_{(t)} \cdot e^{-j\omega_k t}\, dt \tag{265}$$
$$\tag{266}$$

33.8 Fourier-Transformation

$$f_{(t)} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_{(\omega)} \cdot e^{j\omega t}\, d\omega \qquad F_{(\omega)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{(\tau)} \cdot e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

$f_{(t)}$: Zeitfunktion
$F_{(\omega)}$: Spektralfunktion

33.8.1 Variante 1

$$F_{(\omega)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{(t)} \cdot e^{-j\omega t}\, dt \tag{267}$$
$$f_{(t)} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_{(\omega)} \cdot e^{j\omega t}\, \omega \tag{268}$$

ω : Kreisfrequenz
$f_{(t)}$: Zeitfunktion, Signalfunktion, Signal
$F_{(\omega)}$: Frequenzfunktion, Spektralfunktion

33.8.2 Variante 2

$$H_{(f)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h_{(t)} \cdot e^{-2\pi jft}\, dt \tag{269}$$
$$h_{(t)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_{(f)} \cdot e^{-2\pi jft}\, df \tag{270}$$

33.8.3 Variante 3

$$F_{(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(t)} \cdot e^{-j\omega t}\, dt \tag{271}$$

$$f_{(t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{(\omega)} \cdot e^{-j\omega t}\, d\omega \tag{272}$$

33.9 Fourier-Integral

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(t)} \cdot e^{j\omega t}\, dt = Re_{(F)} + j \cdot Im_{(F)} = |F| \cdot e^{j\Phi} \tag{273}$$

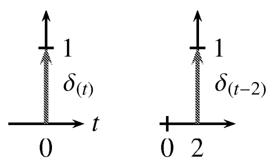
$$\begin{aligned} \omega \mapsto |F| \quad &\hat{=} \quad \text{Amplitudenspektrum} \\ \omega \mapsto \Phi \quad &\hat{=} \quad \text{Phasenspektrum} \end{aligned}$$

33.10 Dirac

33.10.1 Definition

Dirac-Funktion oder auch Delta-Funktion:

$$\delta_{(t)} = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & 0 \text{ sonst} \end{cases} \qquad \text{mit} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{(t)}\, dt = 1 \tag{274}$$



33.10.2 Alternative Definition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{(t)} \cdot \phi_{(t)}\, dt = \phi_{(u)} \tag{275}$$

$$\text{mit } \phi_{(u)} \text{ als sog. Testfunktion } \lim_{t \to \pm\infty} \phi_{(t)} = 0$$

$$\text{es ist } \phi_{(t_0)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{(t-t_0)} \cdot \phi_{(t)}\, dt$$

33.10.3 Eigenschaften

$$f_{(t)} \cdot \delta_{(t)} = f_{(0)} \cdot \delta_{(t)} \tag{276}$$

$$t \cdot \delta_{(t)} = 0 \tag{277}$$

$$\delta_{(a \cdot t)} = \frac{1}{|a|} \delta_{(t)} \tag{278}$$

$$\delta_{(-t)} = \delta_{(t)} \tag{279}$$

33.10.4 Differentiation der Dirac-Funktion

→ partielle Integration

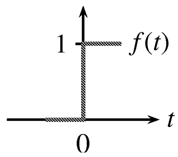
$$\delta'_{(t)} = \frac{\partial}{\partial t}\delta_{(t)} \quad \hat{=} \text{ Distributionsfunktion} \quad \text{Wirkung:} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'_{(t)} \cdot \phi_{(t)}\, dt = -\phi'_{(0)}$$

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\delta_{(t)} = \delta^{(n)}_{(t)} \qquad \text{Wirkung:} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}_{(t)} \cdot \phi_{(t)}\, dt = (-1)^n \cdot \phi^{(n)}_{(0)}$$

33.10.5 Produktregel für Diracfunktion

$$\left(f_{(t)} \cdot \delta_{(t)}\right)' = f'_{(t)} \cdot \delta_{(t)} + f_{(t)} \cdot \delta'_{(t)} = -f_{(0)} \cdot \phi'_{(0)} \tag{280}$$

33.10.6 Heavyside-Funktion



$$f_{(t)} = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{281}$$

$$\delta_{(t)} = \frac{\partial}{\partial t} u_{(t)}$$

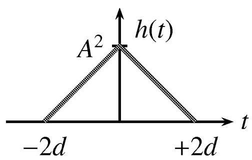
33.10.7 Rechteckimpuls

$$h_{(t)} = \begin{cases} A & |t| < t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{282}$$

$$H_{(f)} = 2Ad \cdot \frac{\sin(2\pi f d)}{2\pi f d} \tag{283}$$

33.10.8 Dreiecksimpuls

$$H_{(f)} = \frac{A^2}{2\pi^2 f^2 d} \cdot \sin(2\pi f d) \tag{284}$$



33.11 Eigenschaften

33.11.1 Linearität

$$F\left(a_1 h_1(t) + a_2 h_2(t)\right) = a_1 \cdot F\left(h_1(t)\right) + a_2 \cdot F\left(h_2(t)\right) \tag{285}$$

$$a_1 h_1(t) + a_2 h_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, a_1 H_1(f) + a_2 H_2(f) \tag{286}$$

33.11.2 Symmetrie

$$h_{(t)} \circ\!\!-\; H_{(f)} \quad \Longrightarrow \quad H_{(t)} \bullet\!\!-\!\!\circ\, h_{(-f)} \tag{287}$$

33.11.3 Zeitskalierung

$$h_{(t)} \circ\!\!-\!\!\bullet H_{(f)} \quad \Longrightarrow \quad h_{(kt)} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{|k|} H\left(\frac{f}{k}\right) \tag{288}$$

33.11.4 Frequenzskalierung

$$H_{(f)} \bullet\!\!-\!\!\circ h_{(t)} \quad \Longrightarrow \quad H_{(kf)} \bullet\!\!-\!\!\circ \frac{1}{|k|} h\left(\frac{t}{k}\right) \tag{289}$$

33.11.5 Zeitverschiebung

$$h_{(t)} \circ\!\!-\!\!\bullet H_{(f)} \quad \Longrightarrow \quad h_{(t-t_0)} \circ\!\!-\!\!\bullet H_{(f)} \cdot e^{-2\pi j f t_0} \tag{290}$$

33.11.6 Frequenzverschiebung

$$H_{(f)} \bullet\!\!-\!\!\circ h_{(t)} \quad \Longrightarrow \quad H_{(f-f_0)} \bullet\!\!-\!\!\circ h_{(t)} \cdot e^{2\pi j f_0 t} \tag{291}$$

33.11.7 Differentiation im Zeitbereich

$$h_{(t)} \circ\!\!-\!\!\bullet H_{(f)} \quad \Longrightarrow \quad h'_{(t)} \circ\!\!-\!\!\bullet 2\pi j f \cdot H_{(f)} \tag{292}$$

mit $\lim_{t\to\pm\infty} h_{(t)} = 0$

$$h^{(n)}_{(t)} \circ\!\!-\!\!\bullet (2\pi j f)^n \cdot H_{(f)} \tag{293}$$

33.11.8 Differentiation im Frequenzbereich

$$H_{(f)} \bullet\!\!-\!\!\circ h_{(t)} \quad \Longrightarrow \quad H'_{(f)} \bullet\!\!-\!\!\circ (-2\pi j f) \cdot h_{(t)} \tag{294}$$

mit $\lim_{f\to\pm\infty} H_{(f)} = 0$

$$H^{(n)}_{(f)} \bullet\!\!-\!\!\circ (-2\pi j f)^n \cdot h_{(t)} \tag{295}$$

34 Statistik

34.1 Begriffe

Grundgesamtheit, Stichprobe: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, Merkmal X

$$\text{relative Häufigkeit} = \frac{\text{absolute Häufigkeit}}{n}$$

	Diskret	Stetig
Stichprobe	emp. Häufigkeitsfunktion emp. Verteilungsfunktion	emp. Dichte emp. Verteilungsfunktion
Grunsgesamtheit	Wahr.-Funktion Wahr.-Verteilung	Wahr.-Dichte Wahr.-Verteilung

34.2 Statistische Parameter

Stichprobe: $x_1 \ldots x_n$

34.2.1 Arithmetisches Mittel

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{296}$$

34.2.2 Median

$$\widetilde{x_1} \ldots \widetilde{x_n} \qquad : \text{geordnete Stichprobe} \tag{297}$$

$$x_{med} = \begin{cases} \widetilde{x_{\frac{n+1}{2}}} & \text{für } n \text{ ungerade} \\ \frac{\widetilde{x_{\frac{n}{2}}} + \widetilde{x_{\frac{n}{2}+1}}}{2} & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases} \tag{298}$$

34.2.3 Modus

$$x_{mod} \quad \hat{=} \quad \text{häufigst aufgetretene Beobachtung} \tag{299}$$

34.2.4 Spannweite

$$x_o - x_u \quad = \quad (\text{max. Wert} \quad - \quad \text{min. Wert}) \tag{300}$$

34.2.5 Standardabweichung

$$s_x = \sqrt[2]{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\overline{x} - x_i)^2} \tag{301}$$

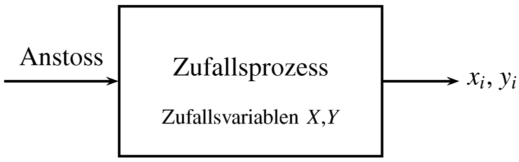
$$\text{oft auch}: \quad s_x = \sqrt[2]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\overline{x} - x_i)^2} \tag{302}$$

34.2.6 Empirische Varianz oder Stichprobenvarianz

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\overline{x} - x_i)^2 \tag{303}$$

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}|\overline{x} - x_i| \qquad \text{mögliche Definition} \tag{304}$$

34.3 Zweidimensionale Stichproben



	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	$\sum$
x_1	f_{11}	f_{12}	$\cdots$	f_{1n}	$\sum f_{1i}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_n	f_{n1}	f_{n2}	$\cdots$	f_{nn}	$\sum f_{ni}$
$\sum$	$\sum f_{i1}$	$\cdots$	$\cdots$	$\sum f_{in}$	

Randverteilung für y

34.4 Robustheit von Masszahlen

Stichprobe: $x_1 \ldots x_n$
$\overline{x}$ ändert wegen einer Änderung eines einzigen x_i-Wertes.
x_{mod} ändert wahrscheinlich nicht.
Allgemein: x_{mod} ist robuster als $\overline{x}$
Vernachlässigung von Masswerten an den Rändern. Beispiel:

$$\overline{\overline{x}} = \frac{1}{n-20} \cdot \sum_{i=10}^{n-10} x_i \qquad \text{für } n > 20$$

$$\overline{\overline{x}} \quad \text{ist robuster als} \quad \overline{x}$$

34.5 Kombinatorik

	ohne Wiederholung	mit Wiederholung
ohne Reihenfolge	$C_n^k = \binom{n}{k}$	${}^wC_n^k = \binom{n+k-1}{k}$
mit Reihenfolge	$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	${}^wV_n^k = n^k$

Spezialfall: $V_n^n = n!$ $\quad \hat{=}$ Permuationen

34.6 Wahrscheinlichkeit

$$P(\mathbb{A}) = \frac{|\mathbb{A}|}{|\Omega|} \hat{=} \frac{günstige Fälle}{\text{mögliche Fälle}} \tag{305}$$

Stillschweigende Annahme: alle Fälle sind gleich Wahrscheinlich.
Beispiel: werfen von 2 Würfeln

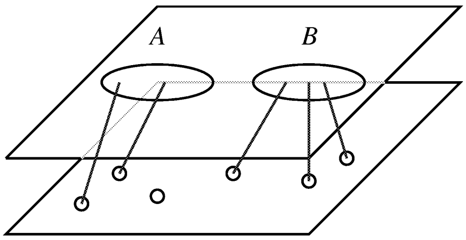
$P(\text{Augensumme } > 4) = ?$ mit $z =$ Augensumme

z	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(z)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

	1	2	3	4	5	6	: 2. Wurf
1	2	3	4	5	6	7	
2	3	4	5	6	7	8	
3	4	5	6	7	8	9	
4	5	6	7	8	9	10	
5	6	7	8	9	10	11	
6	7	8	9	10	11	12	
1. Wurf							

$$\begin{aligned} P(\text{Augensumme } > 4) &= 1 - P(\text{Augensumme } \leq 4) \\ &= 1 - \frac{1+2+3}{36} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

34.7 Ereignisse



Verknüpfungen:

$\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$	: Vereinigung
$\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$	: Durchschnitt
$\mathbb{A} \backslash \mathbb{B}$	: Differenz
Ω	: sicheres Ereignis
$\emptyset$	: unmögliches Ereignis
$\overline{\mathbb{A}}$	: Komplementiertes Ereignis zu $\mathbb{A}$

34.8 Ereignisalgebra

Ω Menge, σ-Algebra, $\mathcal{A}$ ist Teilmenge von $P(\Omega)$, Potenzmenge mit Eigenschaften:

1. $\Omega \subset \mathcal{A}$
2. wenn $\mathbb{A} \subset \mathcal{A}$ dann $\overline{A} \subset \mathcal{A}$
3. Folge $\mathbb{A}_i \subset \mathcal{A}$ dann $\lim\limits_{n\to\infty} \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathbb{A}_i \subset \mathcal{A}$

34.9 Axiomatische Wahrscheinlichkeitstheorie

Definition:

$$P(\Omega) = 1 \tag{306}$$

$$P\Big(\bigcup \mathbb{A}_i\Big) = \sum_i P(\mathbb{A}_i) \text{ mit } \mathbb{A}_i \cap \mathbb{A}_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \tag{307}$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow P(\emptyset) = 0\\
&P(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = P(\mathbb{A}) + P(\mathbb{B}) \text{ sofern } \mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \emptyset\\
&P(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = P(\mathbb{A}) + P(\mathbb{B}) - P(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})\\
&P(\mathbb{A} \cup \overline{\mathbb{A}}) = 1\\
&P(\mathbb{A}) = 0 \wedge \mathbb{A} \neq \emptyset \quad : \text{fast unmögliches Ereignis}\\
&P(\mathbb{A}) = 1 \wedge \mathbb{A} \neq \Omega \quad : \text{fast sicheres Ereignis}
\end{aligned}$$

34.10 Bedingte Wahrscheinlichkeit

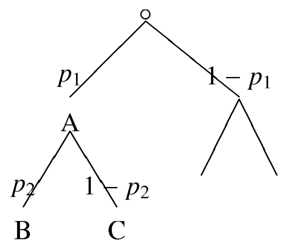
Definition:

$$P(\mathbb{A}/\mathbb{B}) = \frac{P(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})}{P(\mathbb{B})} \tag{308}$$

Multiplikationssatz:

$$P(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) = P(\mathbb{A}/\mathbb{B}) \cdot P(\mathbb{B}) \tag{309}$$

34.11 Ereignisbäume



$$\begin{aligned}
P(A) &= p_1\\
P(B) &= p_1 \cdot p_2\\
P(C) &= p_1 \cdot (1 - p_2)
\end{aligned}$$

34.12 Unabhänigkeit von Ereignissen

Definition: unabhängig wenn:

$$P(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) = P(\mathbb{A}) \cdot P(\mathbb{B}) \tag{310}$$

34.13 Zufallsvariablen

Eine Zufallsvariable ist ein quantitatives Merkmal eines Zufallsprozesses.

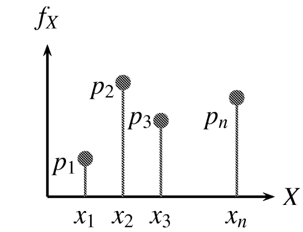
34.13.1 Diskrete Zufallsvariablen und ihre Verteilungen

Jedem Ereignis wird eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet:

$$P(X = x_i) = p_i \qquad i = 1..n \qquad \text{mit } \sum_i p_i = 1 \tag{311}$$

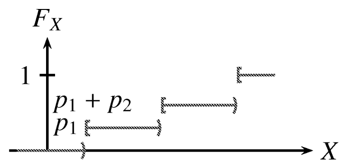
Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten heisst *Wahrscheinlichkeitsfunktion*:

$$f_x : x_i \mapsto P(X = x_i) = p_i \tag{312}$$



Verteilungsfunktion (Wahrscheinlichkeitsfunktion)

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_i p_i \tag{313}$$



deskriptive Statistik	Wahrscheinlichkeitstheorie
empirische Dichte	Wahrscheinlichkeitsfunktion
relative Häufigkeitsfunktion	Wahrscheinlichkeitsfunktion
Stichprobenmittel	Erwartungswert
Stichprobenvarianz	Varianz
Stichprobenstandardabweichung	Standardsabweichung

34.13.2 Erwartungswert

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) \cdot x_i = \mu_X \tag{314}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i \tag{315}$$

$$Y = a \cdot x + b \qquad \Longrightarrow \qquad E(Y) = a \cdot E(X) + b$$

34.13.3 Varianz

$$VAR(X) = \sum_{(i=1)}^{n} P(X = x_i) \cdot (x_i - \mu_X)^2 = \sigma_X^2 \tag{316}$$

$$= E(X^2) - E^2(X) \tag{317}$$

$$Y = a \cdot x + b \qquad \Longrightarrow \qquad VAR(Y) = a^2 \cdot VAR(X)$$

34.13.4 Standardabweichung

$$\sigma_X = \sqrt{(}VAR(X)) \tag{318}$$

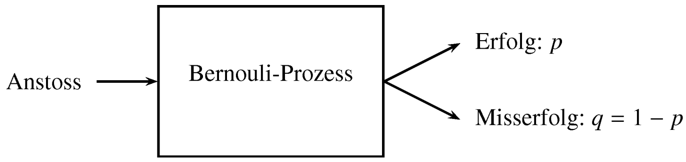
34.13.5 Diskrete Gleichverteilung

Gleichverteilung: $P(X = x_i) = \frac{1}{n} \quad i = 1..n$

$$E(X) = \overline{x}$$

$$VAR(X) = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right] - (\overline{x})^2$$

34.13.6 Bernoulli / Zweipunktverteilung



$$E(X) = p$$
$$VAR(X) = p \cdot q = p \cdot (1 - p)$$

34.13.7 Binominal-Verteilung

Binominalprozess $\hat{=}$ n-malige Wiederholung des Bernoulli-Prozess. X $\hat{=}$ Anzahl Erfolge bei n-maliger Durchführung eines Zweipunkt-Prozesses.

$$x_i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$
$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$
$$E(X) = n \cdot p$$
$$VAR(X) = n \cdot p \cdot q = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

<u>Satz:</u>

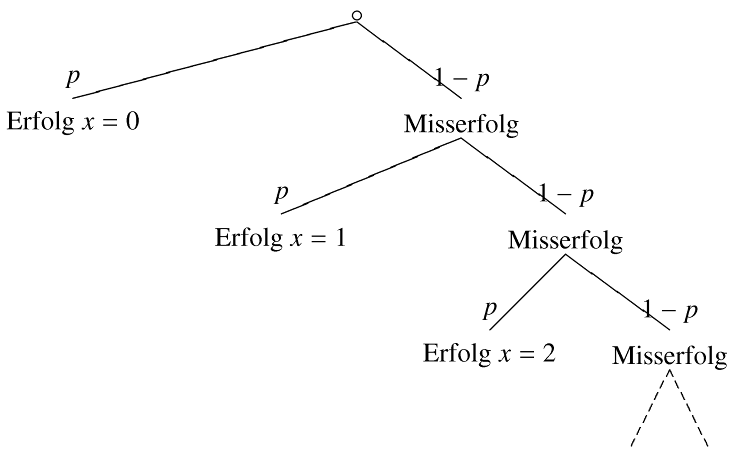
$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \tag{319}$$
$$VAR(X + Y) = VAR(X) + VAR(Y) \tag{320}$$

sofern X und Y unabhängig voneinander.

34.13.8 Geometrische Verteilung

Folge von Bernoulli-Experimenten:

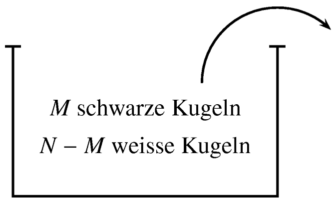
$$X \hat{=} \text{ Anzahl Misserfolge vor dem 1. Erfolg}$$
$$P(X = k) = p \cdot (1 - p)^k \quad k = 0, \ldots$$



$$E(X) = \frac{q}{p} = \frac{1 - p}{p} \qquad VAR(X) = \frac{1 - p}{p^2}$$

34.13.9 Hypergeometrische Verteilung

Von Bedeutung bei der Qualitätskontrolle.



$$
\begin{aligned}
n &: \text{Kugeln, ohne Zurücklegen} \\
X &: \text{Anzahl gezogene schwarze Kugeln} \\
M &: \text{Anzahl schwarze Kugeln} \\
N-M &: \text{Anzahl weisse Kugeln}
\end{aligned}
$$

$$P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}}{\binom{N-M}{n-k}}\binom{N}{n}$$

34.13.10 Poisson-Verteilung

Ankunftsprozess: Poststelle, Check-in-Schalter, etc.

$$X \hat{=} \text{ Anzahl Ankünfte in einer gegebenen Periode}$$

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!} \qquad \text{mit } k=0,1,\dots \text{ und } \lambda: \text{Parameter}$$

$$E(X)=\lambda \qquad VAR(X)=\lambda$$

34.13.11 Stetige Zufallsvariablen

Wahrscheinlichkeitsdichte (Dichtefunktion)

1. $f_X(x)\geq 0 \quad \forall x$
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx=1$
3. $P(a\leq x\leq b)=\int\limits_a^b f_X(\tau)\,d\tau=F_X(b)-F_X(a)$

Erwartungswert

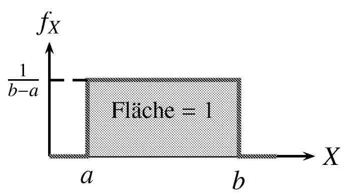
$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f_X(x)\,dx=\mu_X \tag{321}$$

Varianz

$$VAR(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_X)^2\cdot f_X(x)\,dx=\sigma_X \tag{322}$$

$$=E(X^2)-\mu_X^2 \tag{323}$$

Gleichverteilung



$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & : \text{für } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{324}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \tag{325}$$

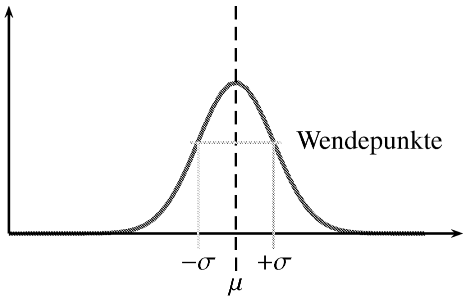
$$E(X^2) = \frac{1}{3}(b^2 + ab + a^2) \tag{326}$$

$$VAR(X) = \frac{(a-b)^2}{12} \tag{327}$$

Standardfall: random $\hat{=}$GL(0, 1)

Normalverteilung (Gauss-Verteilt)

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \text{ mit } \mu, \sigma \text{ als Parameter} \tag{328}$$



Schreibweise: $x \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$
Verteilungsfunktion F_X wird mit Φ bestimmt (siehe Tabelle).

Satz:

$$x \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad \Rightarrow \quad Y = aX + b \sim \mathcal{N}(a \cdot \mu + b, a^2 \cdot \sigma^2) \tag{329}$$

Exponentialverteilung

$$f_X(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \cdot u(x) \tag{330}$$

u : unit-step
Anwendung: Beschreibung der Lebensdauer von Objekten.

$$E(X) = \frac{1}{x} \qquad VAR(X) = \frac{1}{x^2}$$

Momente einer Verteilung k-tes Moment einer Zufallsvariablen $X : E(X^k)$
k-tes zentriertes Moment einr Zufallsvariablen $X : E(|x-c|^k)$
Spezialfälle:

1. Moment entspricht dem *Erwartungswert*
2. Moment zentriert beüglich μ entspricht der *Varianz*

Satz: (Markoff-Ungleichung)

$$P(|x-c| \geq x) \leq \frac{1}{x^k} \cdot E(|x-c|^k) \text{ sofern } E(|x-c|^k) < \infty \tag{331}$$

Spezialfall: Tschebyscheff-Ungleichung

$$P(|x-\mu| \geq x) \leq \frac{1}{x^2} \cdot E(|x-\mu|^2) = \frac{\sigma_x^2}{x^2} \tag{332}$$

34.13.12 Diskret-Stetig

Binominal - Poission Wenn $x \sim \mathrm{B}(n, p)$ mit n gross und p klein, dann ist

$$X \sim P_0(\lambda) \text{ mit } \lambda = n \cdot p \tag{333}$$

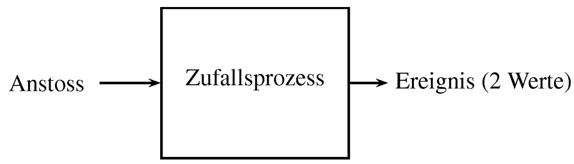
Binominal - Normalverteilung

$$X \sim \mathrm{B}(n, p) \text{ mit } n \cdot p \cdot q > q \tag{334}$$

dann

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \text{ mit } \mu = n \cdot p \text{ und } \sigma^2 = n \cdot p \cdot q \tag{335}$$

34.14 Mehrdimensionale Zufallsvariablen



34.14.1 Diskret

Zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(X = x_i, Y = y_i)$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1 \qquad \text{und } p_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$$

$$F_{XY} = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x_i \leq x} \sum y_i \leq y p_{ij} \tag{336}$$

34.14.2 Stetig

$$f_{XY}(x, y) \text{ mit } \iint_{\mathbb{G}} f_{XY}(x, y)\, dxdy = 1 \text{ und } f_{XY} \geq 0 \quad \forall x, y \tag{337}$$

$$F_{XY} = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y)\, dxdy \tag{338}$$

34.14.3 Zweidimensionale Normalverteilung

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\Delta}} \cdot e^{\begin{pmatrix} x - \mu_x & y - \mu_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x - \mu_x \\ y - \mu_y \end{pmatrix}} \tag{339}$$

wobei

$$\mu_x = E(X) \quad \sigma_1^2 = VAR(X) \qquad \text{und} \qquad \mu_y = E(Y) \sigma_y^2 = VAR(Y)$$

$$\sigma_{12} : \text{weiterer Parameter}$$

$$\Delta = \sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 - (\sigma_{12})^2 \tag{340}$$

34.14.4 Unabhängigkeit

Zwei Zufallsvariablen X und Y sind unabhängig, wenn

$$f_{XY} = f_X \cdot f_Y \tag{341}$$

diskreter Fall:

$$P(X = x_i, Y = y_i) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_i) \tag{342}$$

34.14.5 Summe von Zufallsvariablen

Ist $Z = X + Y$ mit $X \sim F_X(x)$ und $Y \sim F_Y(y)$ voneinander unabhängig, dann ist:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(\tau) \cdot f_Y(z-\tau)\, d\tau \qquad \hat{=}\text{Faltungsintegral} \tag{343}$$

Zur Berechnung können eine der folgenden Möglichkeiten gewählt werden:

- diskret
- Lapalce-Transformation
- Fourier-Transformation

Wenn $X_1 \sim P_o(\lambda_1)$ und $X_2 \sim P_u(\lambda_2)$ diskret und unabhängig sind und $Z = X_1 + X_2$ gilt, dann ist

$$P(Z \le z) = \frac{e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{z!}(\lambda_1+\lambda_2)^2 \tag{344}$$

Satz: Die Summe zweier unabhängiger poissonverteilten Zufallsvariablenist wiederum poissonverteilt.

$$X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$
$$X_1 - X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

falls

$$X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2) \quad \text{und} \quad X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$$

34.14.6 Produkt von Zufallsvariablen

Falls X und Y unabhängig sind:

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) \tag{345}$$

Falls X und Y abhängig voneinander:

$$E(X \cdot Y) \neq E(X) \cdot E(Y)$$
$$VAR(X \cdot Y) \neq VAR(X) \cdot VAR(Y)$$

34.14.7 Kovarianz

$$COV(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) \tag{346}$$

X und Y sind unabhängig voneinander

34.14.8 Korelation

$$\rho(X,Y) = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{VAR(X) \cdot VAR(Y)}} \tag{347}$$

Satz:

$$|\rho| \le 1 \tag{348}$$

Satz:

$$COV(X,Y) = E\left[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))\right] \tag{349}$$

34.15 Zentraler Grenzwertsatz

Saloppe Erklärung:

$$\lim_{n\to\infty} \overline{x} = E(X) \tag{350}$$

formal:

$$X = z_1 + z_2 + \cdots + z_n \qquad z_i \text{ unabhängig, identisch verteilt}$$
$$\Longrightarrow \qquad X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \tag{351}$$

34.16 Markov-Ketten

34.16.1 Stochastischer Prozess

Folge von Zufallsvariablen U_i beschreibt den Zustand eines Systems hinsichtlich eines Merkmals. Dies entspricht einem *Stochastischem Prozess*.

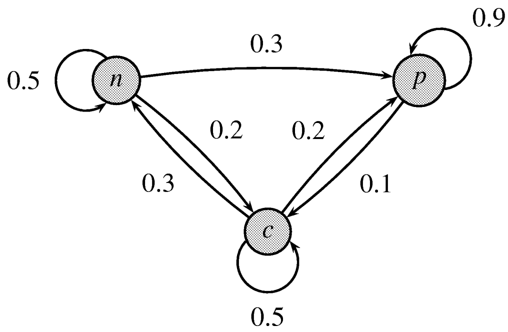
Definition: Markov-Eigenschaft U_i ist nur von U_{i-1} anhängig. Konsequenz: $P(U_i = u)$ ist von U_{i-1} abhängig, d.h. $P(U_i = u/U_{i-1} = w)$ ist eine *bedingte Wahrscheinlichkeit*, eine *Übergangswahrscheinlichkeit*.

Definition: Folge von U_i mit Markov-Eigenschaft heisst *Markov-Kette*. Übergangswahrscheinlichkeiten können als Matrix geschrieben werden:

$$M = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{mit Zeilensumme} = 1$$

Ausgangslage: $P(U_1 = w_k) = \mu_k$

Beispiel:



	n	p	c
n	0.5	0.3	0.2
p	0.0	0.9	0.1
c	0.3	0.2	0.5

$$t = 0 \quad : \vec{\mu} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$
$$\vec{v}^{(1)} = \vec{\mu} \cdot M$$
$$\vec{v}^{(n+1)} = \vec{\mu} \cdot M^n$$

Grenzwert: existiert und ist $\vec{\pi} \implies \vec{\pi} = \vec{\pi} \cdot M$ (nur Eigenvektor zu $\lambda = 1$).

34.17 χ^2-Verteilung

Stetige Zufallsvariable X mit der Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma(\frac{n}{2})} & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \tag{352}$$

heisst χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden $X \sim \chi^2(n)$ oder $X \sim \mathrm{Chi}^2(n)$.

34.17.1 Gamma-Funktion

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{k-1} \, dt \quad \text{mit } \alpha > 0 \tag{353}$$

mit

$$\Gamma(1) = 1$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$
$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha - \Gamma(\alpha)$$

$$E(X) = n \qquad X_1 \sim \chi^2(n_1)$$
$$VAR(X) = 2n \qquad X_2 \sim \chi(n_2)$$

sind voneinander unabhängig $\Longrightarrow X_1 + X_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$.

<u>Satz:</u>

$$x_i \sim \mathcal{N}(0,1) \qquad \text{mit } i = 1 \dots n \text{ , unabhängig}$$
$$\Longrightarrow z = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \sim \chi^2(n) \tag{354}$$

34.18 *t*-Verteilung

Stetige Zufallsvariable X mit der Dichte

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{n})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \qquad x \in \mathbb{R} \tag{355}$$

Grenzfall: $n \to \infty : f_X(x) \to \mathcal{N}(0,1)$

$$E(X) = 0 \qquad \text{(wegen Symmetrie)}$$
$$VAR(X) = \frac{n}{n-2} \qquad \text{für } n \geq 3$$

34.19 F-Verteilung

Eine Zufallsvariable X mit der Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})\cdot(\frac{m}{n})^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{n})\cdot\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \frac{x^{\frac{n}{2}}-1}{(1+\frac{m}{n}\cdot x)^{\frac{m+n}{2}}} & \text{für } x > 0 \end{cases} \tag{356}$$

heisst *F-Verteilt* mit (m, n) Freiheitsgrade.

$$E(X) = \frac{n}{n-2} \qquad \text{für } n \geq 3$$
$$VAR(X) = \frac{2n^2(m+n-2}{m(n-2)^2(n-4)} \qquad \text{für } x \geq 5$$
$$X_1 \sim \chi^2(n_1) \qquad \text{und} \qquad X_2 \sim \chi^2(n_2)$$

voneinander unabhängig

$$\Longrightarrow \frac{X_1/n_1}{X_2/n_2} \sim F(n_1, n_2)$$

wobei

$$X \sim F(m,n) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{x} \sim F(n,m)$$