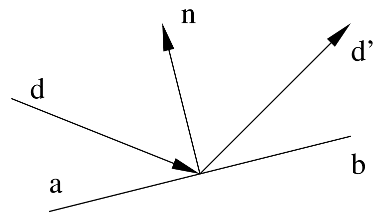
# Spiegelung

Mario Konrad
Mario.Konrad@gmx.net

27. April 2003

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Einer Gereade an einer Andern (2D)




## 1.1 Herleitung

Gegeben ist eine Gerade, definiert durch zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\vec{p} = \vec{a} + \lambda \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \tag{1}$$

Weiter ist ein Vektor $\vec{d}$ gegeben, der an der oben definierten Geraden gespiegelt werden soll. Das Spiegelbild von $\vec{d}$ ist $\vec{d'}$.

Die Projektion eines Vektors $\vec{a}$ auf einen andern $\vec{b}$ ist wie folgt definiert:

$$\vec{a_b} = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \cdot \vec{b} \tag{2}$$

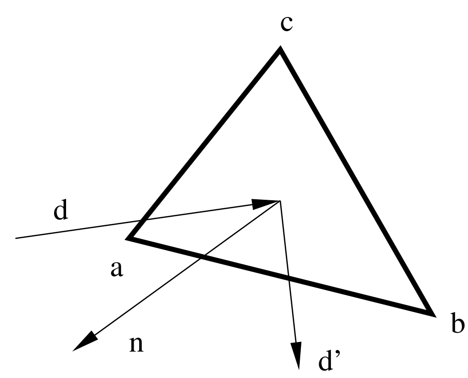
Der gespiegelte Vektor $\vec{d'}$ ergibt sich aus der Addition von $\vec{d}$ und zwei mal dem projezierten Vektor auf die Gerade:

$$\vec{d'} = \vec{d} + \frac{\vec{d} \circ (\vec{b} - \vec{a})}{\|(\vec{b} - \vec{a})\|^2} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \tag{3}$$

## 1.2 Umsetzung in C

```
typedef double[2] Vector;

Vector a = { ... }, b = { ... };
Vector d = { ... };

Vector ba;
ba[0] = b[0]-a[0];
ba[1] = b[1]-a[1];

double f = (d[0]*ba[0] + d[1]*ba[1]) / (ba[0]*ba[0] + ba[1]*ba[1]);

d[0] += f * ba[0];
d[1] += f * ba[1];
```

# 2 Einer Geraden an einer Fläche (3D)




## 2.1 Herleitung

Gegeben sind drei Punkte (definiert durch drei Vektoren) die eine Ebene bilden: $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$:

$$\vec{p} = \vec{a} + \lambda \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + \mu \cdot (\vec{c} - \vec{a}) \tag{4}$$

Weiter ist ein Vektor $\vec{d}$ gegeben, der an der oben definierten Ebene gespiegelt werden soll.

Als erstes berechnen wir den Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene:

$$\vec{n} = (\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a}) \tag{5}$$

Sofern der Vektor $\vec{d}$ und der Normalenvektor $\vec{n}$ rechtwinklig zueinander sind, dann ist ein Spiegeln ummöglich, da der Vektor $\vec{d}$ und die Ebene koplanar sind. Also es gilt, falls

$$\vec{d} \circ \vec{n} = 0 \tag{6}$$

dann sind Vektor und Ebene koplanar, also keine Spiegelung möglich.

Die Projektion des umgegekehrten Vektors von $\vec{d}$ auf $\vec{n}$ ist:

$$\vec{d^*} = -\vec{d} \qquad \text{und} \qquad \vec{d_n} = \frac{\vec{d^*} \circ \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \vec{n} \tag{7}$$

Das Lot auf $\vec{n}$ ist somit:

$$\vec{t} = \vec{d_n} - \vec{d^*} \tag{8}$$

Nun ist die Spiegelung einfach: der umgekehrte Vektor von $\vec{d}$ plus zwei mal das Lot auf den Normalenvektor $\vec{n}$:

$$\vec{d'} = \vec{d^*} + 2 \cdot \vec{t}$$
$$\vec{d'} = \vec{d^*} + 2 \cdot (\vec{d_n} - \vec{d^*})$$
$$\vec{d'} = 2 \cdot \vec{d_n} - \vec{d^*}$$
$$\vec{d'} = 2 \cdot \vec{d_n} + \cdot \vec{d}$$
$$\vec{d'} = 2 \cdot \frac{\vec{d^*} \circ \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \vec{n} + \cdot \vec{d}$$

$$\vec{d'} = \vec{d} - 2 \cdot \frac{\vec{d} \circ \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \vec{n} \tag{9}$$

## 2.2 Umsetzung in C

```
typedef double[3] Vector;

Vector a = { ... }, b = { ... }, c = { ... };
Vector d = { ... };

Vector n, ba, ca;

ba[0] = b[0]-a[0]; ba[1] = b[1]-a[1]; ba[2] = b[2]-a[2];
ca[0] = c[0]-a[0]; ca[1] = c[1]-a[1]; ca[2] = c[2]-a[2];

n[0] = ba[1]*ca[2]-ba[2]*ca[1];
n[1] = ba[2]*ca[0]-ba[0]*ca[2];
n[2] = ba[0]*ca[1]-ba[1]*ca[0];

double dot = n[0]*d[0] + n[1]*d[1] + n[2]*d[2];
if (dot == 0.0) return; /* koplanar */
double len2 = n[0]*n[0] + n[1]*n[1] + n[2]*n[2];
double u = -2.0 * dot / len2;

d[0] += u * n[0];
d[1] += u * n[1];
d[2] += u * n[2];
```

Und schon ist der Vektor $\vec{d}$ gespiegelt.